

CH I – ÉTUDE DE FONCTIONS

OBJECTIFS :

- La « boîte à outils » :
Ensemble de définition – parité – sens de variation – sens de concavité - limites
- Etude de quelques fonctions

I – Etude de fonctions : la « boîte à outils »

1 Ensemble de définition

Définition

L'ensemble de définition de la fonction $f : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ est l'ensemble, noté D_f , des réels x tels que $f(x)$ soit « calculable ».



UN RAPPEL

- Un quotient est « calculable » lorsque son dénominateur est non nul :

$$\frac{A}{B} \text{ "calculable" } \Rightarrow B \neq 0$$

- Une racine carrée est « calculable » lorsque son radicande (ce qu'il y a sous la racine) est positif ou nul :

$$\sqrt{A} \text{ "calculable" } \Rightarrow A \geq 0$$

- Le logarithme d'une expression est « calculable » lorsque l'expression (ce dont on prend le logarithme) est strictement positive :

$$\ln A \text{ "calculable" } \Rightarrow A > 0$$

➤ Exemple

Déterminer l'ensemble de définition des fonction définies par :

1. $f(x) = \frac{5x + 4}{2x^2 - 5x - 3}$
2. $g(x) = \ln(2x^2 - 5x - 3)$ avec $\ln$: logarithme népérien

➤ Solution

1. Ensemble de définition de la fonction définie par : $f(x) = \frac{5x + 4}{2x^2 - 5x - 3}$

La fonction f est définie si et seulement si son dénominateur est non nul : $2x^2 - 5x - 3 \neq 0$

🔴 Calcul du discriminant : on a ici : $a = 2$; $b = -5$; $c = -3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = \boxed{49} > 0$$

On a donc ici deux racines distinctes. On peut d'abord calculer (par commodité) $\sqrt{\Delta}$:

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{49} = \boxed{7}$$

🔵 Calcul des racines :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - 7}{2 \times 2} = \frac{-2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + 7}{2 \times 2} = \frac{12}{4} = \boxed{3}$$

🟢 Conclusion :

Par suite : $2x^2 - 5x - 3 \neq 0$ lorsque : $x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq 3$. Donc : $D_f = \mathbf{R} - \left\{ -\frac{1}{2}; 3 \right\}$

2. Ensemble de définition de la fonction définie par : $g(x) = \ln(2x^2 - 5x - 3)$

La fonction g est définie si et seulement si l'expression dont on prend le logarithme népérien est strictement positive : $\boxed{2x^2 - 5x - 3 > 0}$

🔴 Signe de $2x^2 - 5x - 3$: $a = 2$; $b = -5$; $c = -3$

On connaît déjà (Cf. 1.) les racines de $2x^2 - 5x - 3$: $x' = -\frac{1}{2}$ et $x'' = 3$

Il reste à compléter le tableau de signes suivant en notant que : $a = 2 > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
$2x^2 - 5x - 3$	+	0	-	+

]-----[-----]

🔵 Conclusion :

Par suite : $2x^2 - 5x - 3 > 0$ lorsque x se situe à l'extérieur des racines $-\frac{1}{2}$ et 3 .

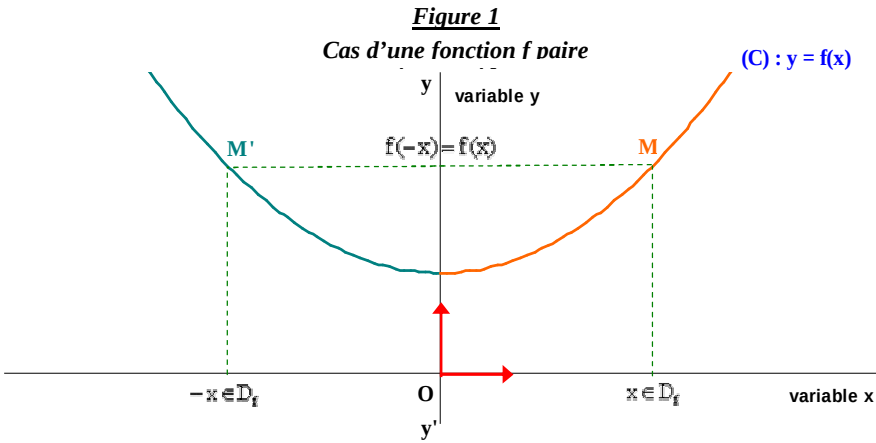
Donc : $D_g = \left] -\infty; -\frac{1}{2} \right[\cup] 3; +\infty [$

2 **Fonction paire – fonction impaire**

a) **Définition** *Fonction paire*

La fonction f est **paire** si son ensemble de définition, noté D_f , est « symétrique par rapport à 0 » et si l'on a, pour $x \in D_f$: $f(-x) = f(x)$

Conséquence géométrique

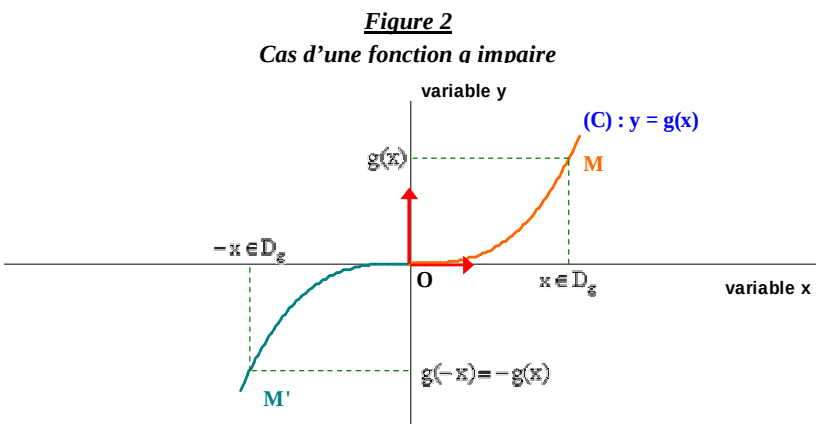


Si f est **paire**, sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé est **symétrique par rapport à l'axe (y'Oy) des ordonnées**.

b) **Définition** *Fonction impaire*

La fonction g est **impaire** si son ensemble de définition, noté D_g , est « symétrique par rapport à 0 » et si l'on a, pour $x \in D_g$: $g(-x) = -g(x)$

Conséquence géométrique



Si g est **impaire**, sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé est **symétrique par rapport au point O, origine du repère**.

➡ **Exemple**

Montrer que la fonction f définie pour $x \neq -1$ et $x \neq 1$ par $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 1}$ est une fonction impaire.

➡ **Solution**

Etude de la parité de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 - 1}$

🔴 **Ensemble de définition :**

$D_f = \mathbf{R} - \{-1; 1\}$ Cet ensemble est bien symétrique par rapport à 0.

🔵 **Calcul de $f(-x)$:**

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x^3 - 3x}{x^2 - 1} = \frac{-(x^3 + 3x)}{x^2 - 1} = -\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 1} = \boxed{-f(x)}$$

Car : $(-x)^3 = -x^3$ et $(-x)^2 = x^2$

🟢 **Conclusion :**

f est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport au point O, origine du repère.

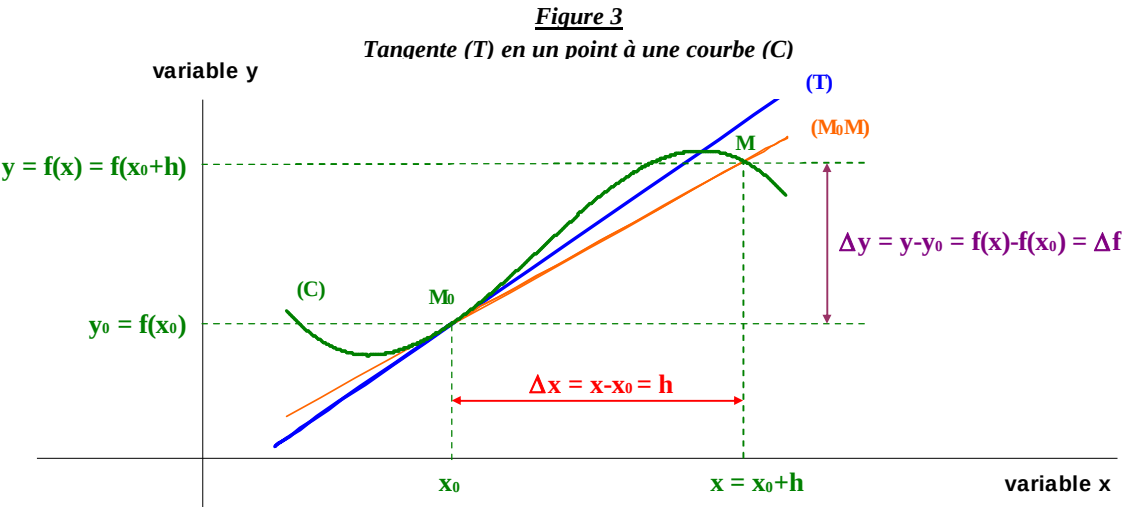
3 Equation de la tangente en un point à une courbe

a) Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $x_0 \in I$.
L'équation de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 s'écrit : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Le coefficient directeur de la tangente (T), à savoir $f'(x_0)$, s'interprète comme la limite du taux d'accroissement de la variable y par rapport à la variable x entre les valeurs x_0 et $x_0 + h$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - (x_0)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Remarque

Autre formule équivalente (lycée) : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

➔ **Exemple**

Soit la fonction f définie, pour x réel, par : $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$

Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) représentative de f au point d'abscisse $x_0 = -2$.

➔ **Solution**

Equation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = -2$

🔗 **Calcul de $f'(x)$:**

Pour x réel, on a : $f'(x) = 8x - 3$

🔗 **Equation de la tangente (T) à la courbe (C)**

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Avec : } \begin{cases} x_0 = -2 \\ y_0 = f(x_0) = 4(-2)^2 - 3(-2) + 1 = 23 \\ f'(x_0) = 8(-2) - 3 = -19 \end{cases}$$

$$y - 23 = -19[x - (-2)]$$

$$y = -19x - 38 + 23$$

$$y = -19x - 15$$

4 Sens de variation d'une fonction

a) Propriété fondamentale

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- ▶ Si on a : $f'(x) > 0$ sur l'intervalle I , alors f est strictement croissante sur l'intervalle I .
- ▶ Si on a : $f'(x) < 0$ sur l'intervalle I , alors f est strictement décroissante sur l'intervalle I .
- ▶ Si on a : $f'(x) = 0$ sur l'intervalle I , alors f est constante sur l'intervalle I .

En d'autres termes, le sens de variation d'une fonction s'étudie à partir du signe de sa dérivée. Ainsi :

- On calculera d'abord la dérivée
- On donnera ensuite toutes les indications nécessaires à l'étude de son signe
- On résumera l'ensemble des informations dans un tableau appelé tableau de variations

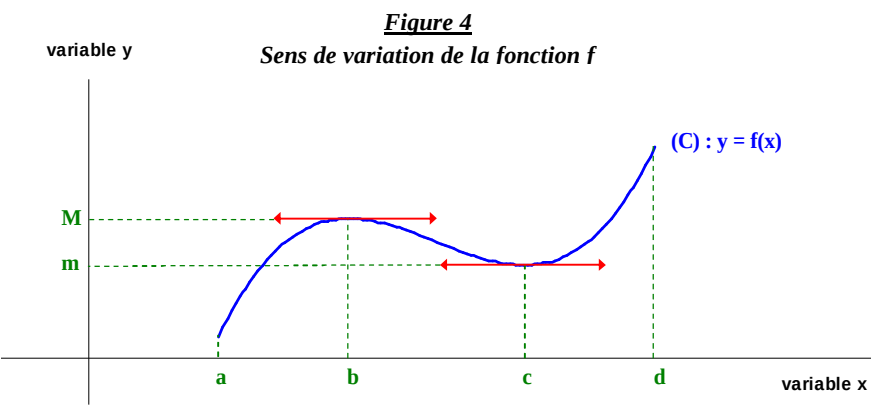


Tableau de variations associé à la courbe (C) représentative de f :

x	a		b		c		d	
f'(x)	+		0	−		0	+	
f(x)			M			m		

b) Optimisation d’une fonction à une variable : recherche des extremums

Optimiser est une opération fondamentale en Economie : maximiser un profit, minimiser un coût, etc ... Optimiser une fonction d’une variable, c’est rechercher ses extremums : minimums ou maximums. Cela passe systématiquement par le calcul de la dérivée première de f.

1^{ère} méthode : Etude des variations de f

La fonction f admet un extremum (minimum ou maximum) au point x_0 de l’intervalle I si :

▶ $f'(x_0) = 0$

▶ $f'(x)$ change de signe au voisinage de x_0 .

Remarques

- C’est la méthode la plus utilisée : on établit le tableau de variations de f et on l’analyse. Optimiser une fonction à une variable, cela signifie : établir le tableau de variations de f et l’analyser.
- En un extremum, on a : $f'(x_0) = 0$: la tangente à la courbe en ce point est donc parallèle à l’axe des abscisses : on la tracera toujours (en rouge sur la figure 4).

2^{nde} méthode : Méthode utilisée en Economie

La fonction f admet un extremum au point x_0 de l’intervalle I si on a :

▶ Condition nécessaire du 1^{er} ordre : $f'(x_0) = 0$

▶ Condition suffisante du 2nd ordre :

- Si $f''(x_0) < 0$, f admet un maximum au point x_0 .
- Si $f''(x_0) > 0$, f admet un minimum au point x_0 .

➔ **Exemple**

Optimiser avec chacune des deux méthodes la fonction f définie, pour x réel, par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

➔ **Solution**

1^{ère} méthode : Etude des variations de f

🔮 Calcul de $f'(x)$:

Pour x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 - 12x$

🔴 Valeurs annulant $f'(x)$:

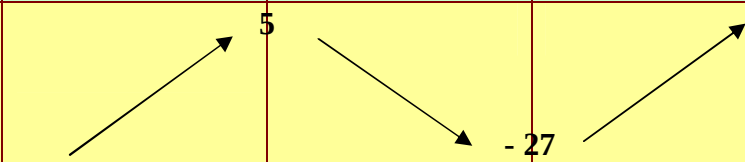
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 4}$$

🔵 Tableau de variations : $ax^2 + bx + c$ est du signe de a (ici : $a = 3 > 0$) à l'extérieur des racines

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$				

🟢 Analyse du tableau de variations et conclusion :

La fonction f admet un **maximum** au point 0 égal à : $f(0) = 0^3 - 6 \times 0^2 + 5 = 0 - 0 + 5 = \boxed{5}$

La fonction f admet un **minimum** au point 4 égal à : $f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 5 = 64 - 96 + 5 = \boxed{-27}$

2nde méthode : Méthode utilisée en Economie

● Condition nécessaire du 1er ordre : recherche des réels x_0 tels que : $f'(x_0) = 0$

🟡 Calcul de $f'(x)$:

Pour x réel, on a : $f'(x) = \boxed{3x^2 - 12x}$

🔴 Valeurs annulant $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 4) = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x - 4 = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 4}$$

● Condition suffisante du 2nd ordre : signe de $f''(x_0)$ avec x_0 tel que : $f'(x_0) = 0$

🔵 Calcul de $f''(x)$:

Pour x réel, on a : $f''(x) = \boxed{6x - 12}$

🟢 Signe de $f''(x_0)$ avec $f'(x_0) = 0$:

1er cas : $\boxed{x_0 = 0}$

On a : $f''(x_0) = f''(0) = 6 \times 0 - 12 = \boxed{-12} < 0$

Donc : f admet au point $x_0 = 0$ un **maximum** égal à : $f(0) = 0^3 - 6 \times 0^2 + 5 = 0 - 0 + 5 = \boxed{5}$

2nd cas : $\boxed{x_0 = 4}$

On a : $f''(x_0) = f''(4) = 6 \times 4 - 12 = \boxed{12} > 0$

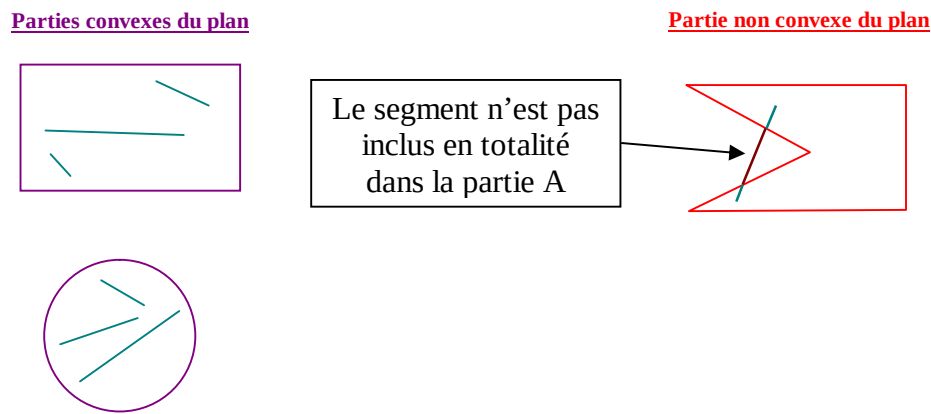
Donc : f admet au point $x_0 = 4$ un **minimum** égal à : $f(4) = 4^3 - 6 \times 4^2 + 5 = 64 - 96 + 5 = \boxed{-27}$

5 Sens de concavité d’une fonction

a) Définition

Une partie A du plan est **convexe** si tout segment dont les extrémités sont dans A est **totalement** inclus dans A.

Figure 5
Parties convexes et non convexes du plan

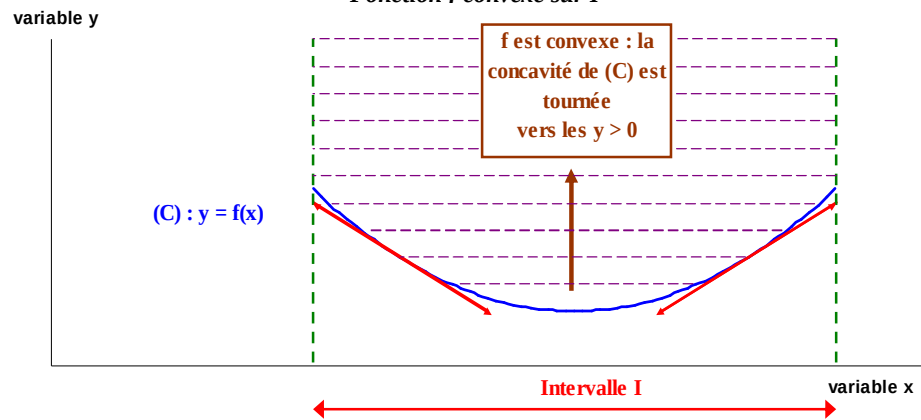


b) Cas d’une fonction

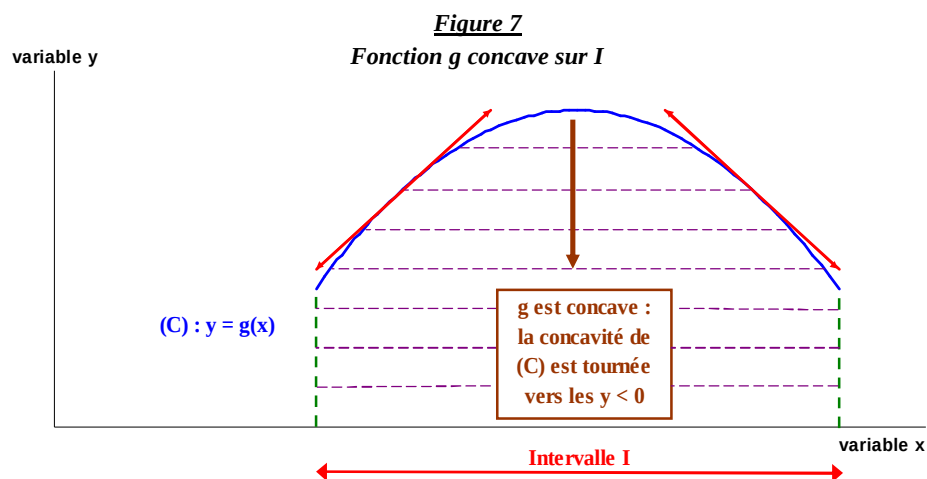
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- ▶ La fonction f est **convexe** sur I si l’ensemble des points situés au-dessus de sa courbe représentative sur l’intervalle I est une partie convexe du plan.
- ▶ La fonction f est **concave** sur I si l’ensemble des points situés en dessous de sa courbe représentative sur l’intervalle I est une partie convexe du plan.

Figure 6
Fonction f convexe sur I



Lorsque f est **convexe** sur I , sa courbe représentative a sa « **concavité tournée vers les $y > 0$** » et, en tout point de l’intervalle I , la **tangente** est **située en dessous de la courbe (C)**.



Lorsque f est concave sur I , sa courbe représentative a sa « concavité tournée vers les $y < 0$ » et, en tout point de l'intervalle I , la tangente est située au-dessus de la courbe (C).

c) Caractérisation

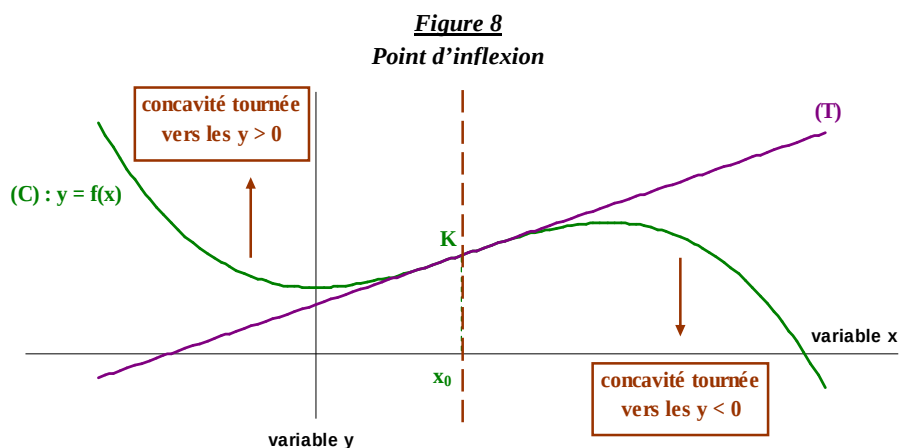
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- ▶ Si on a : $f''(x) > 0$ sur l'intervalle I , alors f est convexe sur l'intervalle I .
- ▶ Si on a : $f''(x) < 0$ sur l'intervalle I , alors f est concave sur l'intervalle I .

En d'autres termes, le sens de concavité d'une fonction s'étudie à partir du signe de sa dérivée seconde.

d) Point d'inflexion

C'est un point qui correspond à un « changement de concavité » de la courbe.



Au point d'inflexion K , la tangente (T) « traverse » donc la courbe.

Définition

La fonction f admet un point d'inflexion au point x_0 de l'intervalle I si :

- ▶ $f''(x_0) = 0$
- ▶ $f''(x)$ change de signe au voisinage de x_0 .

➡ **Exemple** *Sens de concavité et point d’inflexion*

Soit la fonction numérique définie sur **R** par : $f(x) = x^3 - 3x^2$

- 1. Etudier le sens de concavité de f.
- 2. Déterminer l’équation de la tangente (T) au point d’inflexion.

➡ **Solution**

- 1. Etude du sens de concavité de f

🔴 Calcul de f'(x)

Pour x réel, on a : $f'(x) = 3x^2 - 6x$

🔴 Calcul de f''(x) :

Pour x réel, on a : $f''(x) = 6x - 6$

🔵 Valeur annulant f''(x) :

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 6$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

🟢 Tableau récapitulatif

X	$-\infty$	1	$+\infty$
f''(x)	-	0	+
Concavité de f	Concavité tournée vers les y < 0		Concavité tournée vers les y > 0

🔴 Conclusion : la fonction f admet un point d’inflexion au point d’abscisse $x_0 = 1$.

- 2. Equation de la tangente (T) au point d’inflexion

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ Avec : $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = f(x_0) = 1^3 - 3 \times 1^2 = 1 - 3 = -2 \\ f'(x_0) = 3 \times 1^2 - 6 \times 1 = -3 \end{cases}$

$y - (-2) = -3(x - 1)$

$y + 2 = -3x + 3$

$y = -3x + 1$

a) Fonctions polynômesUN RAPPEL

Un polynôme $P(x)$ de degré n s'écrit :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$$

Avec : $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ réels tels que $a_n \neq 0$

Le terme de plus haut degré de $P(x)$ est son terme de degré n : $a_n x^n$

Propriété

Soit P un polynôme de degré n .

▶ Limite en un point

La limite du polynôme P en un point x_0 (x_0 réel) est égale à la valeur de P au point x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

▶ Limite en $\pm \infty$

La limite du polynôme P en $\pm \infty$ est égale à la limite en $\pm \infty$ de son terme de plus haut degré :

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_n x^n$$

➔ Exemple *Limites d'un polynôme de degré 2*

Soit la fonction polynôme P définie sur $\mathbf{R}$ par : $P(x) = -2x^2 + 3x - 4$

1. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 3} P(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} P(x)$
2. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$

➔ Solution

1. Limite aux points 3 et -1 du polynôme $P(x)$

✎ Calcul de la limite au point 3

On remplace de fait x par 3 dans l'expression du polynôme $P(x)$ et on calcule :

$$\lim_{x \rightarrow 3} P(x) = P(3) = -2 \times 3^2 + 3 \times 3 - 4 = -18 + 9 - 4 = \boxed{-13}$$

✎ Calcul de la limite au point -1

On remplace de même x par -1 dans l'expression du polynôme $P(x)$ et on calcule :

$$\lim_{x \rightarrow -1} P(x) = P(-1) = -2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) - 4 = -2 - 3 - 4 = \boxed{-9}$$

2. Limite en $-\infty$ et en $+\infty$ du polynôme $P(x)$

✎ Terme de plus haut degré du polynôme $P(x)$

$P(x)$ est de degré 2 : son terme de plus haut degré est le terme de degré 2, soit $-2x^2$

Calcul de la limite en $-\infty$

On applique la propriété :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = \boxed{-\infty} \quad \text{Car : } \begin{cases} -2 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$$

Calcul de la limite en $+\infty$

On obtient de même :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x^2 = \boxed{-\infty} \quad \text{Car : } \begin{cases} -2 < 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \end{cases}$$

b) Fonctions rationnelles



UN RAPPEL

Une fonction rationnelle s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômes :

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Avec : $P(x)$ et $Q(x)$ polynômes de degrés n et k quelconques

La fonction rationnelle f est définie lorsque : $Q(x) \neq 0$

Elle est irréductible ou non simplifiable si les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ ne possèdent pas de facteur commun.

Propriété

Soit f une fonction rationnelle irréductible.

▶ Limite en un point n'appartenant pas à son ensemble de définition

La limite de f en un point x_0 ($x_0 \notin D_f$) est infinie : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

L'étude du signe du numérateur et du dénominateur de $f(x)$ à gauche ($x \rightarrow x_0^-$) et à droite de x_0 ($x \rightarrow x_0^+$) permet de préciser le signe que l'on affecte à l'infini : $-\infty$ ou $+\infty$

▶ Limite en $\pm \infty$

La limite de f en $\pm \infty$ est égale à la limite en $\pm \infty$ du rapport de ses termes de plus haut degré.

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0}{b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a_n x^n}{b_k x^k}$$

➔ Exemple Limites de fonctions rationnelles : les différents types d'asymptote

1. Calculer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{5x-2}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{-3x^2+x-7}$

2. Soit la fonction rationnelle f définie sur $\mathbf{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 2}$.

Calculer : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x+1) = 0$

3. Soit la fonction rationnelle g définie sur $\mathbf{R} - \{2\}$ par $g(x) = \frac{2x+7}{x-2}$. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

➔ Solution

1. Limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de fonctions rationnelles avec une limite finie : asymptote horizontale

🔗 Calcul d'une limite en $-\infty$

On calcule la limite $-\infty$ du rapport des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{5x-2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{5} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

La limite est finie : on dit que la droite d'équation : $y = \frac{2}{5}$ est asymptote horizontale (A.H.) à la courbe.

🔗 Calcul d'une limite en $+\infty$

On calcule la limite $+\infty$ du rapport des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+2}{-3x^2+x-7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{-3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{-3x} = \boxed{0}$$

La limite est finie : on dit que la droite d'équation : $y = 0$ est asymptote horizontale (A.H.) à la courbe.

2. Limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle avec une limite infinie : cas d'une asymptote oblique

🔗 Calcul de la limite en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+5x-3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = \boxed{+\infty}$$

La limite est infinie : il n'y a pas d'asymptote horizontale ici.

🔗 Existence d'une asymptote oblique en $+\infty$

Montrons que la droite d'équation : $y = 2x+1$ est asymptote oblique (A.O.) en $+\infty$ à la courbe.

Pour cela :

▶ On va calculer et simplifier dans $\mathbf{R} - \{-2\}$ la différence : $f(x) - (ax+b) = f(x) - (2x+1)$

▶ On effectue un « passage à la limite » : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax+b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x+1) = \boxed{0}$

▶ Calcul de la différence $f(x) - (ax+b)$

Pour $x \in \mathbf{R} - \{-2\}$:

$$f(x) - (ax+b) = f(x) - (2x+1)$$

$$f(x) - (ax+b) = \frac{2x^2+5x-3}{x+2} - \frac{(2x+1)(x+2)}{x+2}$$

$$f(x) - (ax+b) = \frac{2x^2+5x-3-(2x^2+4x+x+2)}{x+2}$$

$$f(x) - (ax+b) = \frac{2x^2+5x-3-2x^2-4x-x-2}{x+2}$$

$$f(x) - (ax+b) = \boxed{\frac{-5}{x+2}}$$

▶ Passage à la limite :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax+b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (2x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5}{x+2} = \boxed{0}$$

► Conclusion :

La droite d'équation : $y = 2x + 1$ est asymptote oblique (A.O.) en $+\infty$ à la courbe représentative de f .

3. Limite infinie d'une fonction rationnelle en un point x_0 ($x_0 \notin D_g$) : asymptote verticale

🔴 Ensemble de définition de g

La fonction rationnelle g est définie si son dénominateur est non nul :

$x - 2 \neq 0 \iff \boxed{x \neq 2}$

🔴 Limite de g au point 2

On obtient dans un premier temps :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2} 2x + 7 = 2 \times 2 + 7 = \boxed{11} \\ \lim_{x \rightarrow 2} x - 2 = 2 - 2 = \boxed{0} \end{array} \right\} \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 7}{x - 2} = \boxed{\infty}$$

Dans un second temps, précisons le signe de l'infini. Pour cela, on doit évaluer le signe de $g(x)$ à proximité du point 2 en considérant deux cas : $x \rightarrow 2^-$ (à gauche de 2) et $x \rightarrow 2^+$ (à droite de 2).

Signe du numérateur de $g(x)$:

$\lim_{x \rightarrow 2} 2x + 7 = 2 \times 2 + 7 = 11 > 0$

Signe du dénominateur de $g(x)$:

x	$-\infty$	2^-	2	2^+	$+\infty$
$x - 2$		-	0	+	

Etude au point 2 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x + 7 = 11 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0^- < 0 \end{array} \right\} \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \boxed{-\infty}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 7 = 11 > 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x - 2 = 0^+ > 0 \end{array} \right\} \text{ Donc : } \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \boxed{+\infty}$$

La limite est infinie : on dit que la droite d'équation : $x = 2$ est asymptote verticale (A.V.) à la courbe.

II – Etude de fonctions : Exemples

➡ Exemple 1 *Fonction polynôme du deuxième degré*

Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et soit (C) sa courbe représentative.

1. Effectuer une étude complète de la fonction f . En particulier, Préciser son sens de concavité.
2. Ecrire l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse -1 .
3. Tracer la courbe (C) ainsi que la tangente (T).

➔ **Solution**

1. Etude complète de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = x^2 - 2x - 3$

🔴 Ensemble de définition :

Il n’y a pas de contrainte pour le calcul d’un polynôme : $D_f = \mathbf{R}$

🔴 Calcul des limites : (**HORS PROGRAMME D’EXAMEN**)

▶ En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

▶ En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

🔴 Etude du sens de variation :

▶ Calcul de la dérivée :

Pour $x \in \mathbf{R}$: $f'(x) = 2x - 2$

▶ Signe de la dérivée :

Pour $x \in \mathbf{R}$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

🔵 Etude du sens de concavité :

▶ Calcul de la dérivée seconde :

Pour $x \in \mathbf{R}$: $f''(x) = 2$

▶ Signe de la dérivée seconde :

Pour $x \in \mathbf{R}$: $f''(x) = 2 > 0$

La courbe (C) a sa concavité tournée vers les $y > 0$ sur $\mathbf{R}$ ou encore f est convexe sur $\mathbf{R}$.

🟢 Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+		+
Concavité de f	Concavité tournée vers les $y > 0$		
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$ ↘	-4	↗ $+\infty$

2. Equation de la tangente (T) au point d'abscisse -1

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Avec : } \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = f(x_0) = (-1)^2 - 2 \times (-1) - 3 = 0 \\ f'(x_0) = 2 \times (-1) - 2 = -4 \end{cases}$$

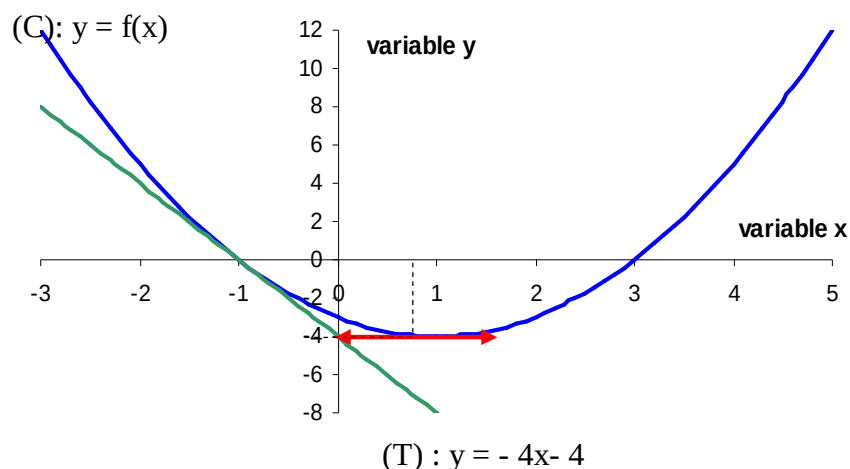
$$y - 0 = -4[x - (-1)]$$

$$y - 0 = -4(x + 1)$$

$$\boxed{y = -4x - 4}$$

3. Tracé de la courbe (C) et de la tangente (T)

Figure 9
Représentation graphique de f et de sa tangente (T)



➔ **Exemple 2** *Fonction polynôme du troisième degré*

Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5$ et soit (C) sa courbe représentative.

1. Effectuer une étude complète de la fonction f . En particulier, étudier son sens de concavité.
2. Ecrire l'équation de la tangente (T) au point d'inflexion.
3. Tracer la courbe (C) ainsi que la tangente (T).

➔ **Solution**

1. Etude complète de la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5$

🔴 Ensemble de définition :

Il n'y a pas de contrainte pour le calcul d'un polynôme : $\boxed{D_f = \mathbf{R}}$

🔴 Calcul des limites : (**HORS PROGRAMME D'EXAMEN**)

▶ En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = \boxed{+\infty}$

▶ En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = \boxed{-\infty}$

🔴 Etude du sens de variation :

▶ Calcul de la dérivée :

Pour $x \in \mathbf{R}$: $f'(x) = \boxed{-3x^2 + 12x}$

► Signe de la dérivée :

Pour $x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 12x = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(-x + 4) = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x + 4 = 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 0 \text{ ou } x = 4}$$

► Etude du sens de concavité :

► Calcul de la dérivée seconde :

$$\text{Pour } x \in \mathbf{R} : f''(x) = \boxed{-6x + 12}$$

► Signe de la dérivée seconde :

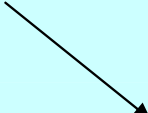
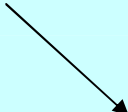
Pour $x \in \mathbf{R}$:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 12 = 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = -12$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$$

► Tableau récapitulatif :

X	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$								
$f''(x)$	+	+	0	-	-								
Concavité de f	Concavité tournée vers les $y > 0$			Concavité tournée vers les $y < 0$									
$f'(x)$	-	0	+	12	+	0	-						
$f(x)$	$+\infty$			-5			11			27			$-\infty$

► Conclusion : f admet un point d'inflexion au point d'abscisse $x_0 = 2$.

2. Equation de la tangente (T) au point d'inflexion d'abscisse 2

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{Avec : } \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = f(x_0) = -2^3 + 6 \times 2^2 - 5 = 11 \\ f'(x_0) = -3 \times 2^2 + 12 \times 2 = 12 \end{cases}$$

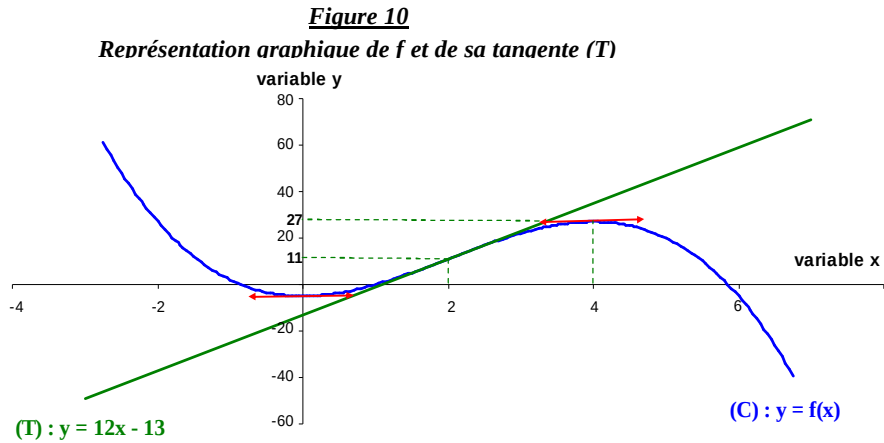
$$y - 11 = 12(x - 2)$$

$$y - 11 = 12x - 24$$

$$y = 12x - 24 + 11$$

$$\boxed{y = 12x - 13}$$

3. Tracé de la courbe (C) et de la tangente (T)



➡ **Exemple 3** **Fonction rationnelle**

Soit la fonction numérique définie par : $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

- 1. Effectuer une étude de la fonction f : ensemble de définition et sens de variation
Limites (admisses) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$
- 2. Ecrire l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse $x_0 = 3$ à la courbe (C).
- 3. Tracer la courbe (C), la tangente (T) ainsi que les droites d'équation : $x = 1$ et $y = 2$.

➡ **Solution**

1. Etude de la fonction f :

🔴 **Ensemble de définition :**

La fonction f est définie lorsque son dénominateur est non nul : $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$

Par suite : $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

🔴 **Etude du sens de variation :**

➡ **Calcul de la dérivée :**

$$f = \frac{u}{v}$$
$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Avec :

$$\begin{cases} u(x) = 2x + 3 & u'(x) = 2 \\ v(x) = x - 1 & v'(x) = 1 \end{cases}$$

Pour $x \in D_f$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x+3)(1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2) - (2x+3)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \boxed{\frac{-5}{(x-1)^2}}$$

► Signe de la dérivée :

Pour $x \in D_f : (x-1)^2 > 0$ donc $f'(x)$ a le même signe que son numérateur : -5

Par suite, pour $x \in D_f : f'(x) < 0$

🟢 Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f'(x)	-		-
Sens de variation	2 $\searrow$ $-\infty$		$+\infty$ $\searrow$ 2

3. Equation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse $x_0 = 3$

$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

Avec :

$$\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = f(x_0) = f(3) = \frac{2 \times 3 + 3}{3 - 1} = \frac{9}{2} = 4,5 \\ f'(x_0) = f'(3) = \frac{-5}{(3-1)^2} = \frac{-5}{4} = -1,25 \end{cases}$$

$y - 4,5 = -1,25(x - 3)$

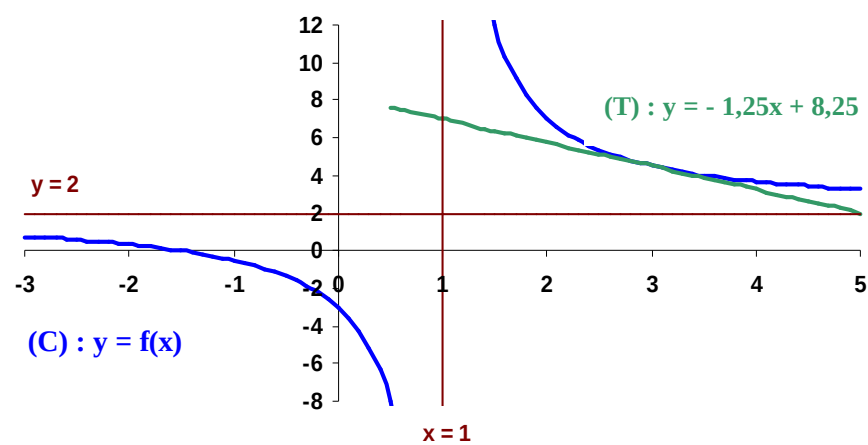
$y - 4,5 = -1,25x + 3,75$

$y = -1,25x + 3,75 + 4,5$

$y = -1,25x + 8,25$

3. Tracé de la courbe (C), de la tangente (T) et des droites d'équation : $x = 1$ et $y = 2$

Figure 11
Représentation graphique de f , de sa tangente (T) et des droites d'équation : $x = 1$ et $y = 2$



CH II – LES FONCTIONS USUELLES

OBJECTIFS :

- Les fonctions puissances
- La fonction logarithme népérien
- La fonction exponentielle de base e

I – Les fonctions puissances

1 Définition - Propriétés

Ensemble de définition

- Si a est un **entier strictement positif**, la fonction telle que : $f(x) = x^a$ est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Exemples :

Si $f(x) = x^2$, on a : $D_f = \mathbf{R}$ - Si $f(x) = x^{33}$, on a : $D_f = \mathbf{R}$ - Si $f(x) = x^{74}$, on a : $D_f = \mathbf{R}$

- Si a est un **entier négatif ou nul**, la fonction telle que : $f(x) = x^a$ est définie sur $\mathbf{R}^*$ ($\mathbf{R}$ privé de 0).

Exemples :

Si $f(x) = x^{-2}$, on a : $D_f = \mathbf{R}^*$ - Si $f(x) = x^{-33}$, on a : $D_f = \mathbf{R}^*$

- De façon générale (mais il existe d'autres cas particuliers), si a est un **réel quelconque**, la fonction telle que : $f(x) = x^a$ est définie sur $\mathbf{R}^{+*}$ (ensemble des réels strictement positifs).

Exemples :

Si $f(x) = x^{\sqrt{3}}$, on a : $D_f = \mathbf{R}^{+*}$ - Si $f(x) = x^{-2-\sqrt{5}}$, on a : $D_f = \mathbf{R}^{+*}$

Propriétés algébriques

Pour a, b réels, $x > 0$ et $y > 0$:

• $(xy)^a = x^a y^a$

• $x^{a+b} = x^a x^b$

• $x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}$

• $(x^a)^b = x^{ab}$

• $1^a = 1$

• $x^0 = 1$

Exemple

Compléter : $(2x)^3 = 2^3 x^3 = 8x^3$ - $(2^3 x^5)^2 = (2^3)^2 (x^5)^2 = 2^6 x^{10} = 64x^{10}$

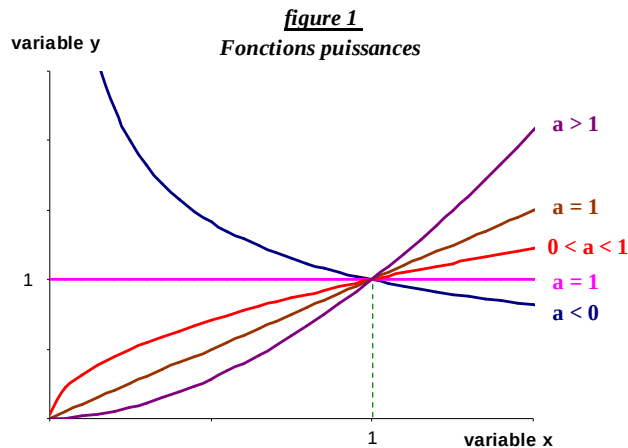
Dérivée

Pour a réel et $x > 0$: $(x^a)' = a x^{a-1}$

Exemple

Compléter : $(x^3)' = 3x^2$ - $(x^{-4})' = -4x^{-5}$ - $(x^{\sqrt{5}})' = \sqrt{5} x^{\sqrt{5}-1}$

Représentation graphique



2 Fonction racine nième (n entier positif, non nul)

Soit n un entier positif, non nul.

➔ Si n est un **entier pair**, la **racine nième** de x n’est définie que pour $x \geq 0$ et vérifie :

- si $x \geq 0$: $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$
- si $x < 0$: non définie

Exemples :

$2^4 = 16$ donc : $\sqrt[4]{16} = 2$ - $3^8 = 6561$ donc : $\sqrt[8]{6561} = 3$ - $5^6 = 15625$ donc : $\sqrt[6]{15625} = 5$

➔ Si n est un **entier impair** : la **racine nième** de x est définie pour x réel et vérifie :

- si $x \geq 0$: $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow y^n = x$
- si $x < 0$: $\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{-x}$

Exemples :

$2^5 = 32$ donc : $\sqrt[5]{32} = 2$ - $(-3)^5 = -243$ donc : $\sqrt[5]{-243} = -3$ - $(-5)^3 = -125$ donc : $\sqrt[3]{-125} = -5$

➔ Pour x positif, on note : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ et on définit « **la racine p/qième** » : $\sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p = x^{\frac{p}{q}}$

Exemples

➔ **Exemple 1** Exemples de calculs

1. Compléter les égalités ci-dessous.
2. Exprimer simplement : $8^{\frac{5}{3}}$ et $36^{\frac{3}{2}}$

➔ **Solution**

1. Complétons les égalités suivantes :

● $5^2 = 25$ donc : $\sqrt{25} = 25^{\frac{1}{2}} = \boxed{5}$

● $2^3 = 8$ donc : $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = \boxed{2}$

● $3^4 = 81$ donc : $\sqrt[4]{81} = 81^{\frac{1}{4}} = \boxed{3}$

● $(-4)^3 = -64$ donc : $\sqrt[3]{-64} = -\sqrt[3]{64} = \boxed{-4}$

2. Exprimons simplement :

$$\bullet \quad 8^{\frac{5}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^5 = 2^5 = \boxed{32}$$

$$\bullet \quad 36^{\frac{3}{2}} = \left(36^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 6^3 = \boxed{216}$$

➔ **Exemple 2** *Une résolution d'équation*

Résoudre dans **R** l'équation : $(1+x)^5 = 1,157625$

(Remarquer que l'inconnue x figure dans ce qui est élevé à la puissance 5)

➔ **Solution**

On élève chaque membre à la puissance $1/5^{\text{ème}}$ pour faire apparaître à gauche l'expression

$$(1+x)^1 = 1+x :$$

$$(1+x)^5 = 1,157625 \Leftrightarrow [(1+x)^5]^{\frac{1}{5}} = 1,157625^{\frac{1}{5}}$$

$$(1+x)^5 = 1,157625 \Leftrightarrow (1+x)^{5 \times \frac{1}{5}} = 1,05 \quad \text{Car : } (a^p)^q = a^{p \times q}$$

$$(1+x)^5 = 1,157625 \Leftrightarrow (1+x)^1 = 1,05$$

$$(1+x)^5 = 1,157625 \Leftrightarrow 1+x = 1,05 \quad \text{Car : } a^1 = a$$

$$(1+x)^5 = 1,157625 \Leftrightarrow x = 1,05 - 1$$

$$(1+x)^5 = 1,157625 \Leftrightarrow \boxed{x = 0,05}$$

II – La fonction logarithme népérien

1 **Primitive**

a) **Définition**

La fonction F est une **primitive** de la fonction f sur l'intervalle I si, pour $x \in I$, on a : $F'(x) = f(x)$

b) **Exemples**

➔ Soit la fonction définie sur **R** par : $f(x) = 3x^2$

On a, pour x réel : $(x^3 + \text{cte})' = 3x^2 + 0 = f(x)$. Donc :

■ La fonction F telle que $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur **R**.

■ En fait, f admet une infinité de primitives sur **R** définies à une constante près. On note ainsi :

$$\int f(x) dx = x^3 + \text{cte} \quad (\text{intégrale indéfinie})$$

■ Finalement, la fonction F telle que $F(x) = x^3$ est **la** primitive de f sur **R** qui s'annule pour $x = 0$.

➔ **Définition du logarithme népérien**

La fonction **logarithme népérien** est **la** primitive, sur l'intervalle $]0; +\infty[$ de la fonction inverse :

$$x \mapsto \frac{1}{x}, \text{ qui s'annule pour } x = 1.$$

2 Fiche technique de la fonction logarithme népérien

➡ Notation :

$$\ln : \begin{cases}]0; +\infty[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \ln x \end{cases}$$

➡ Ensemble de définition : $D_{\ln} =]0; +\infty[$

- Pour x réel :
 $\ln x$ est calculable lorsque : $x > 0$
 $\ln |x|$ est calculable lorsque : $x \neq 0$
- Pour u fonction de x :
 $\ln u$ est définie lorsque : u est définie et $u > 0$
 $\ln |u|$ est définie lorsque : u est définie et $u \neq 0$

➡ Limites : **(HORS PROGRAMME D'EXAMEN)**

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

➡ Valeurs particulières :

- $\ln 1 = 0$
- $\ln e = 1$ ($e \approx 2,718$: base du logarithme népérien)
- $\ln x$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ tout entier.

➡ Dérivée :

■ Pour x réel :

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ avec : $x > 0$

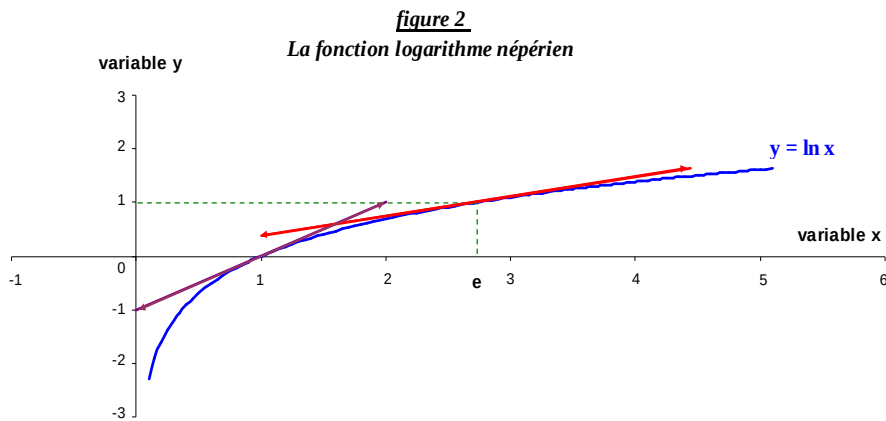
$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ avec : $x \neq 0$

■ Pour u fonction dérivable de x :

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec : $u > 0$

$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$ avec : $u \neq 0$

➡ Courbe représentative :



➔ Signe de $\ln x$:

■ $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

■ $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$

➔ Propriétés algébriques :

Pour $a > 0$, $b > 0$ et x réel quelconque :

● $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

● $\ln(a^x) = x \ln a$

● $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

● $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$

➔ Equations - Inéquations :

■ Pour $x > 0$ et a réel :

$\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$

et $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a$

■ Pour $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

et $\ln a < \ln b \Leftrightarrow 0 < a < b$

➔ Comportement de x^a et de $\ln x$ ($a > 0$) : (**HORS PROGRAMME D'EXAMEN**)

■ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln x = 0 \left(= \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \right)$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0 \left(= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^a} \right)$

➔ Logarithme décimal :

■ Pour $x > 0$:

$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$

■ La fonction **logarithme décimal** possède les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien. On notera cependant que, 10 étant la base du logarithme décimal :

$\log 10 = \frac{\ln 10}{\ln 10} = 1$, mais que : $\log e = \frac{1}{\ln 10} \neq 1$.

3 Exemples

➔ Exemple 1 *Dérivée – Dérivées partielles du 1^{er} ordre*

1. Déterminer l'ensemble de définition, puis la dérivée de la fonction f définie par :

$f(x) = \ln(-x^2 + 5x - 4)$

2. Calculer les dérivées partielles du 1^{er} ordre de la fonction définie, pour $K > 0$ et $L > 0$, par :

$Y(K, L) = 2 \ln K + 7 \ln L + 1$ en utilisant les notations « allégées » : Y'_K et Y'_L

3. Calculer les dérivées partielles du 1^{er} ordre de la fonction définie, pour $x > 0$ et $y > 0$, par :

$U(x, y) = 4 \ln(3x) + 5 \ln(2y) + 6$ en utilisant les notations « allégées » : U'_x et U'_y

➔ **Solution**

1. Ensemble de définition de f :

La fonction f est définie lorsque : $-x^2 + 5x - 4 > 0$

■ Etude de $-x^2 + 5x - 4$:

Calcul du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-4) = 25 - 16 = \boxed{9} > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 3$$

Calcul des racines :

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 3}{-2} = \frac{-8}{-2} = \boxed{4}$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 3}{-2} = \frac{-2}{-2} = \boxed{1}$$

■ Signe de $-x^2 + 5x - 4$:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$	
$-x^2+5x-4$	-	0	+	0	-



■ Conclusion : Par suite : $-x^2 + 5x - 4 > 0$ lorsque x se situe entre les racines 1 et 4 :

$$\boxed{D_f =]1; 4[}$$

Dérivée de f :

$$f = \ln u$$

$$f' = \frac{u'}{u}$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} u(x) = -x^2 + 5x - 4 \\ u'(x) = -2x + 5 \end{cases}$$

Pour $x \in D_f$, on a :
$$\boxed{f'(x) = \frac{-2x + 5}{-x^2 + 5x - 4}}$$

2. Calcul des dérivées partielles du 1^{er} ordre : (notations « allégées »)

$$Y(K, L) = 2 \ln K + 7 \ln L + 1$$

Calcul de Y'_K (K = variable et L = constante)

$$Y'_K = 2 \frac{1}{K} + 0 + 0$$

$$Y'_K = \boxed{\frac{2}{K}}$$

Calcul de Y'_L (K = constante et L = variable)

$$Y'_L = 0 + 7 \frac{1}{L} + 0$$

$$Y'_L = \boxed{\frac{7}{L}}$$

3. Calcul des dérivées partielles du 1^{er} ordre : (notations « allégées »)

$$U(x, y) = 4 \ln(3x) + 5 \ln(2y) + 6 \quad \text{On sait que : } (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

Calcul de U'_x (x = variable et y = constante)

$$U'_x = 4 \frac{3}{3x} + 0 + 0$$

$$U'_x = \boxed{\frac{4}{x}}$$

Calcul de U'_y (x = constante et y = variable)

$$U'_y = 0 + 5 \frac{2}{2y} + 0$$

$$U'_y = \boxed{\frac{5}{y}}$$

➔ Exemple 2 *Equations - Inéquations*

1. Résoudre dans **R** :

a) $\ln x = -2$

b) $\ln x < 3$

2. Déterminer le plus petit entier positif n tel que : $1,05^n > 10$

(Remarquer que l'inconnue x figure dans l'exposant)

➔ Solution

1. Résolution dans R :

a) Condition d'existence : $\boxed{x > 0}$

$$\ln x = -2 \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{-2} \Leftrightarrow \boxed{x = e^{-2}} > 0$$

b) Condition d'existence : $\boxed{x > 0}$

$$\ln x < 3 \Leftrightarrow 0 < e^{\ln x} < e^3 \Leftrightarrow \boxed{0 < x < e^3}$$

2. Calcul du plus petit entier positif n :

$$1,05^n > 10 \Leftrightarrow \ln(1,05^n) > \ln 10 \Leftrightarrow n \ln 1,05 > \ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{\ln 10}{\ln 1,05} \Leftrightarrow n > 47,19...$$

Donc, le plus petit entier positif n tel que : $1,05^n > 10$ est : $\boxed{n = 48}$

➔ Exemple 3 *Etude de fonction avec un logarithme népérien*

1. Etudier les variations de la fonction définie par : $f(x) = x^3 \ln x$

Limites admises : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. En effectuer une représentation graphique.

➔ Solution

1. Etude complète (sans le sens de concavité) de la fonction f définie par : $f(x) = x^3 \ln x$

🔴 Ensemble de définition :

La fonction f est définie si l'on peut calculer $\ln x$, donc pour $x > 0$. On a donc : $\boxed{D_f =]0; +\infty[}$

👉 Etude du sens de variation :

▶ Calcul de la dérivée :

$$\begin{aligned} f &= u \cdot v \\ f' &= u' \cdot v + u \cdot v' \end{aligned} \quad \text{Avec : } \begin{cases} u(x) = x^3 & u'(x) = 3x^2 \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Pour $x > 0$:

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 3x^2 \ln x + x^2$$

$$\boxed{f'(x) = x^2(3 \ln x + 1)}$$

▶ Signe de la dérivée :

Pour $x > 0$:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(3 \ln x + 1) > 0 \quad \text{Or : } x^2 > 0 \text{ lorsque } x > 0$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3 \ln x + 1 > 0 \quad \text{On isole } \ln x \text{ dans un membre}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{1}{3}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \boxed{x > e^{-\frac{1}{3}}} \quad \text{D'après le rappel}$$

👉 Tableau récapitulatif :

X	0	$e^{-\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-\frac{1}{3e}$	$+\infty$

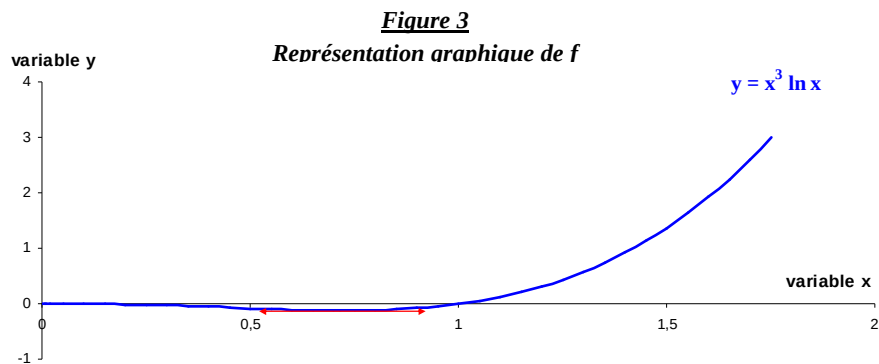
👉 Calcul du minimum de f :

La fonction f admet un minimum au point d'abscisse $x_0 = e^{-\frac{1}{3}}$ égal à :

$$f(e^{-\frac{1}{3}}) = \left(e^{-\frac{1}{3}}\right)^3 \ln\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = e^{-\frac{1}{3} \times 3} \left(-\frac{1}{3} \ln e\right) = e^{-1} \left(-\frac{1}{3}\right) \times 1 = \frac{1}{e} \left(-\frac{1}{3}\right) = \boxed{-\frac{1}{3e}}$$

On notera que : $e^{-\frac{1}{3}} \approx 0,72$ et que : $f(e^{-\frac{1}{3}}) \approx -0,12 < 0$

2. Tracé de la courbe (C) représentative de f



III – La fonction exponentielle de base e

1 Fiche technique de la fonction exponentielle de base e

➡ Notation :

$$\text{exp} : \begin{cases} \mathbf{R} & \rightarrow &]0; +\infty[\\ x & \mapsto & e^x \end{cases}$$

➡ Ensemble de définition : $D_{\text{exp}} = \mathbf{R}$

➡ Limites : **(HORS PROGRAMME D'EXAMEN)**

■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

➡ Valeurs particulières :

■ $e^0 = 1$

■ $e^1 = e \quad (e \approx 2,718)$

■ e^x prend ses valeurs dans l'intervalle $]0; +\infty[$: pour tout réel x : $e^x > 0$

➡ Dérivée :

■ Pour x réel :

$(e^x)' = e^x$

■ Pour u fonction dérivable de x :

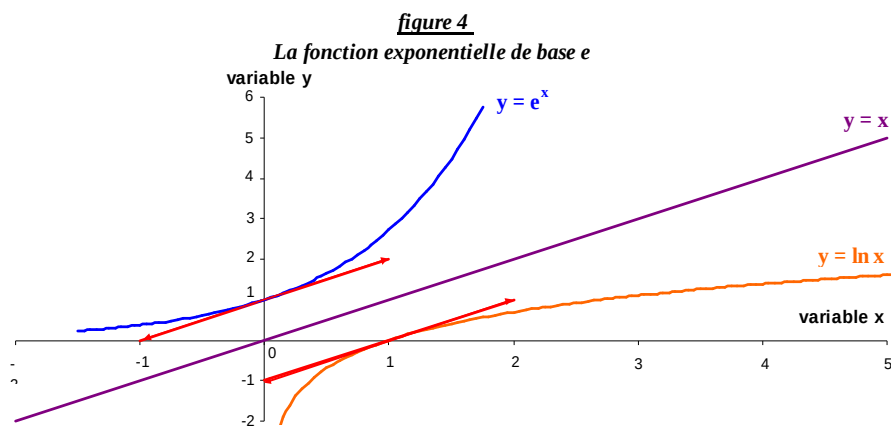
$(e^u)' = u' e^u$

Avec u' : dérivée de l'exposant

En particulier :

$(e^{ax})' = a e^{ax}$

➡ Courbe représentative :



Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction exp est **symétrique** de celle de la fonction ln **par rapport à la droite d'équation $y = x$** .

➔ Signe de e^x :

Pour tout réel x , on a : $e^x > 0$ et plus généralement : $e^{u(x)} > 0$

➔ Propriétés algébriques : ce sont les mêmes propriétés que les puissances

Pour a et b réels quelconques :

• $e^{a+b} = e^a \times e^b$

• $e^{a \cdot b} = (e^a)^b$

• $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$

• $e^{-b} = \frac{1}{e^b}$

• Pour a réel quelconque : $\ln e^a = a$

• Pour $b > 0$: $e^{\ln b} = b$

➔ Equations - Inéquations :

■ Pour a et x réels :

$$e^x = a \iff \begin{cases} x = \ln a & \text{si } a > 0 \\ \text{pas de solution} & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

■ Pour a et x réels :

$$e^x < a \iff \begin{cases} x < \ln a & \text{si } a > 0 \\ \text{pas de solution} & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

■ Pour a et b réels :

$$e^a = e^b \iff a = b \quad \text{et} \quad e^a < e^b \iff a < b$$

➔ Comportement de x^a et de e^x ($a > 0$) : (HORS PROGRAMME D'EXAMEN)

■ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{|x|^a e^x}_{\text{F.I. : "}\infty \times 0\text{"}} = 0 \left(= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \right)$

■ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{e^x}{x^a}}_{\text{F.I. : "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}} = +\infty \left(= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \right)$

En cas de forme indéterminée (F.I.), l'exponentielle e^x l'emporte sur la puissance x^a

➔ Exponentielle de base a ($a > 0$ et $a \neq 1$) : $a^x = e^{x \ln a}$

En particulier, $10^x = e^{x \ln 10}$ (exponentielle de base 10)

2 Exemples

➔ Exemple 1 *Dérivée – Dérivées partielles du 1^{er} ordre*

- Préciser l'ensemble de définition, puis la dérivée de la fonction f définie par :
 $f(x) = 4e^{3x} - 5e^{-2x} + 7e^x$
- Déterminer l'ensemble de définition, puis la dérivée de la fonction g définie par :
 $g(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$
- Calculer les dérivées partielles du 1^{er} ordre de la fonction h définie, pour x et y réels, par :
 $h(x, y) = (2x + 3y - 5)e^{-x}$

CH II – LES FONCTIONS USUELLES

10

→ Solution

1. Ensemble de définition de f : $D_f = \mathbf{R}$

Dérivée de f :

Pour x réel : $f'(x) = 4(3e^{3x}) - 5(-2e^{-2x}) + 7(e^x)$ Car : $(e^{ax})' = a e^{ax}$

$$f'(x) = 12e^{3x} + 10e^{-2x} + 7e^x$$

2. Ensemble de définition de g :

La fonction g est définie lorsque : $x \neq 0$. Donc : $D_g = \mathbf{R}^*$

Dérivée de g :

$$\begin{array}{l}
 g = u v \\
 g' = u' v + u v'
 \end{array}
 \quad
 \text{Avec : }
 \left\{
 \begin{array}{l}
 u(x) = x^2 \\
 v(x) = e^{-\frac{1}{x}} \\
 v = e^w
 \end{array}
 \right.
 \quad
 \begin{array}{l}
 u'(x) = 2x \\
 v'(x) = \left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\
 v' = w' e^w
 \end{array}$$

Pour $x \neq 0$:

$$g'(x) = 2x e^{-\frac{1}{x}} + x^2 \left(\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \right)$$

$$g'(x) = 2x e^{-\frac{1}{x}} + \frac{x^2}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{On simplifie :}$$

$$g'(x) = 2x e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}} \quad \text{On factorise l'exponentielle :}$$

$$g'(x) = e^{-\frac{1}{x}} (2x + 1)$$

3. Calcul des dérivées partielles du 1^{er} ordre de la fonction h :

■ Dérivée partielle par rapport à x :

$$\begin{array}{l}
 h = u v \\
 h'_x = u'_x v + u v'_x
 \end{array}
 \quad
 \text{Avec : }
 \left\{
 \begin{array}{l}
 u(x, y) = 2x + 3y - 5 \\
 v(x, y) = e^{-x} \\
 v = e^w
 \end{array}
 \right.
 \quad
 \begin{array}{l}
 u'_x = 2 \\
 v'_x = -e^{-x} \\
 v'_x = w'_x e^w
 \end{array}$$

Pour x et y réels :

$$h'_x = 2e^{-x} + (2x + 3y - 5)(-e^{-x})$$

$$h'_x = e^{-x} [2 - (2x + 3y - 5)]$$

$$h'_x = e^{-x} (2 - 2x - 3y + 5)$$

$$h'_x = e^{-x} (-2x - 3y + 7)$$

■ Dérivée partielle par rapport à y :

$$h = k u$$

$$h'_y = k u'_y$$

$$\text{Avec : } \begin{cases} k = e^{-x} \\ u(x, y) = 2x + 3y - 5 \end{cases} \quad u'_y = 3$$

Pour x et y réels :

$$h'_y = e^{-x} (3)$$

$$\boxed{h'_y = 3e^{-x}}$$

➔ **Exemple 2** *Equations - Inéquations*

1. Résoudre dans **R** les équations suivantes :

a) $e^x = 7$

b) $e^{-x} = -7$

2. Résoudre dans **R** l'inéquation suivante :

$$e^{2x} < 5$$

➔ **Solution**

1. a) Ensemble de définition de l'équation : $\boxed{D = \mathbf{R}}$

Résolution de l'équation :

$$e^x = 7 \Leftrightarrow \ln e^x = \ln 7 \Leftrightarrow \boxed{x = \ln 7}$$

b) Ensemble de définition de l'équation : $\boxed{D = \mathbf{R}}$

Résolution de l'équation :

$$e^{-x} = -7 : \text{Il n'y a pas de solution car : } e^{-x} > 0 \text{ et } -7 < 0.$$

2. Ensemble de définition de l'inéquation : $\boxed{D = \mathbf{R}}$

Résolution de l'inéquation :

$$e^{2x} < 5 \Leftrightarrow \ln e^{2x} < \ln 5 \Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow \boxed{x < \frac{1}{2} \ln 5}$$

➔ **Exemple 3** *Etude de fonction avec une exponentielle de base e*

Etudier les variations de la fonction f définie par : $f(x) = (3x - 2)e^{-2x}$

Limites admises : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La représentation graphique n'est pas demandée.

➡ **Solution**

1. Etude de la fonction f définie par : $f(x) = (3x - 2)e^{-2x}$

🔴 Ensemble de définition :

Il n'y a pas de contrainte pour le calcul d'une exponentielle : $D_f = \mathbf{R}$

🔴 Etude du sens de variation :

➡ Calcul de la dérivée :

$f = u v$
 $f' = u' v + u v'$

Avec :

$\begin{cases} u(x) = 3x - 2 \\ v(x) = e^{-2x} \\ v = e^w \end{cases}$

↓

$\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = -2 e^{-2x} \\ v' = w' e^w \end{cases}$

↑

→

Pour $x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = 3e^{-2x} + (3x - 2)(-2e^{-2x})$$
$$f'(x) = e^{-2x} [3 + (3x - 2)(-2)]$$
$$f'(x) = e^{-2x} (3 - 6x + 4)$$

$f'(x) = e^{-2x} (-6x + 7)$

➡ Signe de la dérivée :

Pour $x \in \mathbf{R}$:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} (-6x + 7) = 0$

Or : $e^{-2x} > 0$, donc :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -6x + 7 = 0$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -6x = -7$$
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7}{-6}$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7}{6}}$

De plus, comme : $e^{-2x} > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $-6x + 7$.

🟢 Tableau récapitulatif :

x	$-\infty$	$\frac{7}{6}$	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$	$1,5e^{-\frac{7}{6}}$	0

CH II – LES FONCTIONS USUELLES

13

👉 Calcul du maximum de f :

La fonction f admet un maximum au point d'abscisse $x_0 = \frac{7}{6}$ égal à :

$$f\left(\frac{7}{6}\right) = \left(3 \times \frac{7}{6} - 2\right) e^{-2 \times \frac{7}{6}} = \left(\frac{7}{2} - \frac{4}{2}\right) e^{-\frac{7}{3}} = \frac{3}{2} e^{-\frac{7}{3}} = \boxed{1,5 e^{-\frac{7}{3}}}$$

On notera que : $\frac{7}{6} \approx 1,17$ et que : $f\left(\frac{7}{6}\right) \approx 0,15$

CH III – APPLICATIONS À L'ÉCONOMIE

OBJECTIFS :

- Fonction totale – Fonction moyenne – Fonction marginale
- Optimisation à une variable en Economie
- Elasticité ponctuelle

I – Fonction totale – Fonction moyenne – Fonction marginale

On considère une entreprise produisant un bien unique en quantité Q (il s'agit donc ici de fonctions à une variable Q) et vendant la totalité de sa production Q sur un marché unique (ce qui signifie qu'il y a égalité entre quantité produite, l'« offre », et la quantité vendue, la « demande » et pas de « stock »).

1. Cas où les quantités sont données dans un tableau (« données discrètes »)Définition▶ Fonction totale

Coût total CT : c'est l'ensemble des dépenses (coût fixe CF + coût variable CV) nécessaires à la production de la quantité Q . On a : $CT = CF + CV$ avec : $CF = CT(Q = 0)$

Recette totale RT : c'est le chiffre d'affaires de l'entreprise vendant la quantité Q au prix de vente unitaire P . On a : $RT = P \times Q$ avec : $P = PVU = \text{prix de vente unitaire}$

Profit Π : il s'obtient comme la différence entre la recette totale et le coût total. On a :

$$\Pi = RT - CT$$

▶ Fonction moyenne :

Elle s'obtient en divisant la fonction totale par la quantité Q .

Coût moyen CM : c'est le coût par unité produite ou coût unitaire :

$$CM = \frac{CT}{Q}$$

Recette moyenne RM : c'est le chiffre d'affaires par unité vendue ou prix de vente unitaire :

$$RM = \frac{RT}{Q} = P$$

Profit moyen ΠM : c'est le profit unitaire. Il s'obtient aussi comme la différence entre la recette moyenne et le coût moyen :

$$\Pi M = \frac{\Pi}{Q} = RM - CM$$

▶ Fonction marginale :

Elle s'obtient, dans le cas où les quantités sont données dans un tableau, comme l'écart de la fonction totale rapportée à l'écart correspondant entre deux quantités consécutives.

Coût marginal C_m : c'est l'écart de coût total rapporté à l'écart entre deux quantités produites

consécutives : $C_m = \frac{CT(Q') - CT(Q)}{Q' - Q} = \frac{\Delta CT}{\Delta Q}$

Recette marginale R_m : c'est l'écart de recette totale rapporté à l'écart entre deux quantités vendues consécutives :

$$R_m = \frac{RT(Q') - RT(Q)}{Q' - Q} = \frac{\Delta RT}{\Delta Q}$$

Profit marginal Π_m : c'est l'écart de profit rapporté à l'écart entre deux quantités produites et vendues consécutives :

$$\Pi_m = \frac{\Pi(Q') - \Pi(Q)}{Q' - Q} = \frac{\Delta \Pi}{\Delta Q} = R_m - C_m$$

➔ **Exemple** *Concurrence pure et parfaite*

Dans le tableau ci-dessous, coût total, recette totale et profit sont exprimés en euros ; coût moyen et recette moyenne sont exprimés en euros par unité ; coût marginal, recette marginale et profit marginal sont exprimés en euros par unité.

- Détailler le calcul de **A, B, C, D, E, F** et **G** et interpréter rapidement les résultats. Compléter le tableau de calculs ci-dessous (?).
- Quel est le coût fixe de cette entreprise ? Quelle quantité doit produire et vendre l'entreprise pour maximiser son profit. Quel est alors son profit maximal ?

 **UN RAPPEL**

- Dans le cas de la concurrence pure et parfaite, le prix de vente unitaire P est constant, quelle que soit la quantité vendue par l'entreprise. On a : $P = R_m = R_M$
- Le profit Π de l'entreprise est maximum, lorsque l'on a : $\Pi_m = 0$ ou $R_m = C_m$

➔ **Solution**

- Tableau relatif à la concurrence pure et parfaite

Q	Les coûts			Les recettes			Les profits	
	CT	CM	Cm	P = RM	RT	Rm	Π	Πm
0	800	–	–	8	0	–	– 800	–
100	2000	20	12	8	800	8	– 1200	– 4,00
200	2320	11,50	3,20	8	1600	8	– 720	4,80
300	2412	8,04	0,92	8	2400	8	– 12	7,08
400	2524	6,31	1,12	8	3200	8	676	6,88
500	2790	5,58	2,66	8	4000	8	1210	5,34
600	3155	? 5,26	? 3,65	? 8	? 4800	? 8	? 1645	? 4,35
650	3553	A= 5,47	B= 7,96	C= 8	D= 5200	E= 8	F= 1647	G= 0,04
700	3996	? 5,71	? 8,86	? 8	? 5600	? 8	? 1604	? – 0,86
800	5060	6,33	10,64	8	6400	8	1340	– 2,64

🔍 **Détail des calculs de A, B, C, D, E, F et G**

$A = CM = \frac{CT}{Q} = \frac{3553}{650} \approx 5,47 \text{ €/unité}$: c'est le coût de fabrication d'une unité, ou coût unitaire, lorsque la production de l'entreprise s'élève à 650 unités.

B = $C_m = \frac{\Delta CT}{\Delta Q} = \frac{3553 - 3155}{650 - 600} \approx \boxed{7,96 \text{ €/unité}}$: c'est le coût de fabrication pour chaque unité supplémentaire (appelée unité marginale), lorsque la production passe de 600 unités à 650 unités.

C = $RM = P = cte = \boxed{8 \text{ €/unité}}$: c'est le prix de vente unitaire qui est constant quelle que soit la quantité vendue par l'entreprise, lorsque l'on est en concurrence pure et parfaite.

D = $RT = P \times Q = 8 \times 650 = \boxed{5\,200 \text{ €}}$: c'est le chiffre d'affaires de l'entreprise lorsqu'elle vend 650 unités au prix de vente unitaire de 8 €.

E = $R_m = \frac{\Delta RT}{\Delta Q} = \frac{5200 - 4800}{650 - 600} = \boxed{8 \text{ €/unité}}$: c'est le prix de vente de chaque unité supplémentaire vendue (appelée unité marginale), lorsque la quantité vendue passe de 600 unités à 650 unités.

F = $\Pi = RT - CT = 5200 - 3553 = \boxed{1\,647 \text{ €}}$: c'est le profit de l'entreprise pour 650 unités fabriquées et vendues.

G = $\Pi_m = \frac{\Delta \Pi}{\Delta Q} = \frac{1647 - 1645}{650 - 600} \approx \boxed{0,04 \text{ €/unité}}$: c'est le profit pour chaque unité supplémentaire fabriquée et vendue (appelée unité marginale), lorsque la production et la vente passent de 600 unités à 650 unités

2. Coût fixe de cette entreprise

On sait que le coût fixe est égal au coût total en l'absence de production. Ici : $CF = CT(Q = 0) = \boxed{800 \text{ €}}$

Maximisation du profit

Lorsque l'on consulte la colonne des profits Π , on constate que le profit le plus important, soit 1647 € est atteint lorsque l'entreprise produit et vend 650 unités. Ainsi :

$$\Pi_{\max i} = \Pi(Q = 650) = \boxed{1\,647 \text{ €}}$$

On notera qu'au maximum, le profit marginal n'est pas tout à fait nul : $\Pi_m \approx \boxed{0,04 \text{ €/unité}}$

Cela provient du fait que les quantités Q ne varient pas de façon continue dans un intervalle (données sous forme de tableau).

2. Cas où les quantités varient dans un intervalle (données « continues »)

Seules changent les expressions des fonctions marginales : la quantité Q variant dans un intervalle, l'écart ΔQ a donc la possibilité de tendre vers 0 (ce qui était impossible dans le cas précédent).

On posera, par exemple, pour le coût marginal : $C_m = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta CT}{\Delta Q} \Leftrightarrow \boxed{C_m = CT'(Q)}$

On retiendra : fonction marginale = dérivée de la fonction totale

Définition

► Fonction marginale :

Coût marginal C_m : c'est la dérivée du coût total : $\boxed{C_m = CT'(Q)}$

Recette marginale R_m : c'est la dérivée de la recette totale : $\boxed{R_m = RT'(Q)}$

Profit marginal Π_m : c'est la dérivée du profit : $\boxed{\Pi_m = \Pi'(Q)}$

➔ Exemple *Monopole*

Une entreprise fabrique et vend la totalité de sa production sur un marché unique où elle est en situation de monopole. Son coût total de production s'écrit : $CT = 2Q + 104$ avec $0 \leq Q \leq 200$

Sur ce marché, la demande Q_D s'exprime ainsi : $Q_D = 500 - 100P$ avec P : prix de vente unitaire

1. Quel est le coût fixe de l'entreprise ? Son coût moyen ? Son coût marginal ? Quelle est la capacité maximale de production de l'entreprise ? Quelle est la condition d'équilibre sur ce marché ?
2. Le marché est en équilibre. Déterminer en fonction de Q la recette totale ainsi que le profit de cette entreprise.
3. Quelle quantité doit produire et vendre l'entreprise pour maximiser son profit ?



UN RAPPEL

- Dans le cas du **monopole**, l'équilibre du marché est obtenu en **égalant l'offre** (c'est-à-dire la production de l'entreprise) **et la demande** (la quantité qu'il est possible de vendre sur ce marché au prix de vente unitaire P) : $Q_o = Q_D$
- Sauf exception, la quantité demandée Q_D et le prix de vente unitaire P varient en sens inverse : « lorsque l'on achète une grosse quantité, on peut faire un prix »
- Dans le cas du **monopole**, le prix de vente unitaire P est égal à la recette moyenne.
On a : $P = RM$
- Pour que le **profit Π** de l'entreprise soit **maximum**, il faut que :
 $\Pi'(Q) = 0 \Leftrightarrow \Pi_m = 0$

➔ Solution

1. Questions découlant de l'expression du coût total de l'entreprise

💜 Coût fixe de l'entreprise :

Le coût fixe est égal au coût total en l'absence de production. Ici : $CF = CT(Q=0) = 2 \times 0 + 104 = 104$

🍷 Coût moyen de l'entreprise :

C'est le coût unitaire ou coût par unité produite : $CM = \frac{CT}{Q} = \frac{2 \times Q + 104}{Q} = 2 + \frac{104}{Q}$

🔵 Coût marginal de l'entreprise :

C'est la dérivée du coût total : $C_m = CT'(Q) = 2$

🟢 Capacité maximale de production de l'entreprise :

D'après la condition : $0 \leq Q \leq 200$, on constate que l'entreprise peut produire au maximum 200 unités.

🔴 Condition d'équilibre du marché :

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que l'offre (production de l'entreprise) s'ajuste à la demande :

$$Q = Q_D \Leftrightarrow Q = 500 - 100P$$

Cette condition permet d'exprimer le prix de vente unitaire P en fonction de la quantité produite Q :

$$Q = 500 - 100P \Leftrightarrow 100P = 500 - Q \Leftrightarrow P = \frac{500 - Q}{100} \Leftrightarrow P = 5 - 0,01Q$$

2. Recette totale et profit de l'entreprise lorsque le marché est à l'équilibre

Recette totale de l'entreprise :

Le marché étant à l'équilibre, on a : $RT = P \times Q = (5 - 0,01Q)Q = \boxed{5Q - 0,01Q^2}$

Profit de l'entreprise :

C'est la différence entre la recette totale et le coût total :

$$\Pi = RT - CT = (5Q - 0,01Q^2) - (2Q + 104) = 5Q - 0,01Q^2 - 2Q - 104 = \boxed{-0,01Q^2 + 3Q - 104}$$

3. Maximisation du profit de l'entreprise

1ère méthode : étude des variations de $\Pi = f(Q)$ et analyse du tableau de variations

Dérivée :

Pour $0 \leq Q \leq 200$: $\Pi'(Q) = \boxed{-0,02Q + 3}$

Valeur annulant la dérivée :

$$\Pi'(Q) = 0 \Leftrightarrow -0,02Q + 3 = 0 \Leftrightarrow -0,02Q = -3 \Leftrightarrow Q = \frac{-3}{-0,02} \Leftrightarrow \boxed{Q = 150}$$

Tableau de variations :

Q	$-\infty$	0	150	200	$+\infty$
$\Pi'(Q)$			+	0	-
Π			↗ 121 ↘		

Conclusion :

Le profit Π est maximum pour une production de $Q = 150$ unités et on a :

$$\Pi_{\text{Maxi}} = \Pi(150) = -0,01 \times 150^2 + 3 \times 150 - 104 = \boxed{121}$$

2nde méthode : utilisation des dérivées première et seconde : « *méthode des économistes* »

Condition nécessaire du 1er ordre : on résout l'équation : $\Pi'(Q_0) = 0$

Dérivée :

Pour $0 \leq Q \leq 200$: $\Pi'(Q) = \boxed{-0,02Q + 3}$

Valeur annulant la dérivée :

$$\Pi'(Q) = 0 \Leftrightarrow -0,02Q + 3 = 0 \Leftrightarrow -0,02Q = -3 \Leftrightarrow Q = \frac{-3}{-0,02} \Leftrightarrow \boxed{Q = 150 = Q_0}$$

Condition suffisante du 2nd ordre : on évalue le signe de $\Pi''(Q_0)$

Pour la valeur Q_0 trouvée (et uniquement pour celle-ci), on calcule la valeur de $\Pi''(Q_0)$ et on observe le signe du résultat (à condition que le résultat ne soit pas nul).

Dérivée seconde :

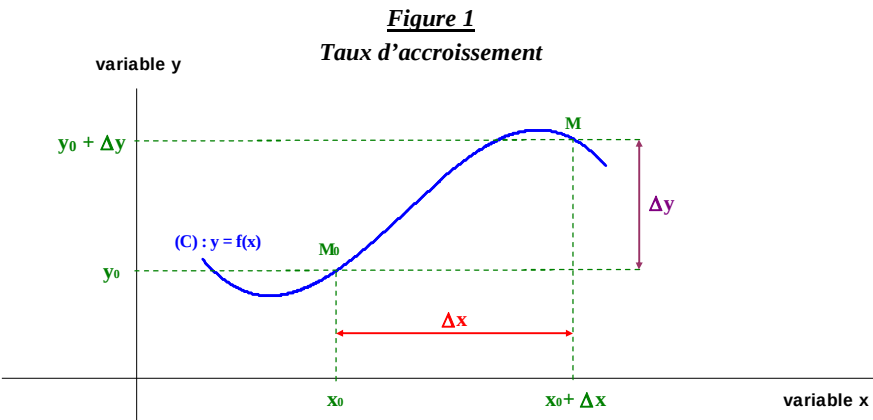
Pour $0 \leq Q \leq 200$: $\Pi''(Q) = \boxed{-0,02}$

- Signe de la dérivée seconde :
 $\Pi''(Q_0) = \Pi''(150) = -0,02 < 0$
- Conclusion :
 Le profit Π est maximum pour une production de $Q = 150$ unités et on a :
 $\Pi_{\text{Maxi}} = \Pi(150) = -0,01 \times 150^2 + 3 \times 150 - 104 = \boxed{121}$

II – Elasticité d’arc – Elasticité ponctuelle

1. Calcul de deux taux d’accroissement

Soit une fonction f définie, non nulle et dérivable sur un intervalle I . En posant : $y = f(x)$, on considère que x est la variable explicative et y la variable à expliquer.



UN RAPPEL

Pour calculer un taux d’accroissement, on posera :

$$\text{Taux d'accroissement} = \frac{\text{Valeur finale} - \text{Valeur initiale}}{\text{Valeur initiale}} \times 100$$

Application :

Taux d’accroissement de la variable y entre y_0 et $y_0 + \Delta y$:

$$\frac{(y_0 + \Delta y) - y_0}{y_0} \times 100 = \frac{y_0 + \Delta y - y_0}{y_0} \times 100 = \boxed{\frac{\Delta y}{y_0} \times 100}$$

Taux d’accroissement de la variable x entre x_0 et $x_0 + \Delta x$:

$$\frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{x_0} \times 100 = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{x_0} \times 100 = \boxed{\frac{\Delta x}{x_0} \times 100}$$

2. **Cas où les quantités sont données dans un tableau (données « discrètes ») : élasticité d’arc**

Définition

L’élasticité sur l’arc M_0M est égale au rapport du taux d’accroissement de y entre y_0 et $y_0 + \Delta y$ par le taux d’accroissement de x entre x_0 et $x_0 + \Delta x$:

$$e_{M_0M} = \frac{\text{Taux d'accroissement de } y \text{ entre } y_0 \text{ et } y_0 + \Delta y}{\text{Taux d'accroissement de } x \text{ entre } x_0 \text{ et } x_0 + \Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{y_0} \times 100}{\frac{\Delta x}{x_0} \times 100}$$

➔ **Exemple**

A partir du tableau suivant, calculer, puis interpréter l’élasticité du coût total y par rapport aux quantités fabriquées x sur l’arc M_0M .

$\Delta x = x - x_0 = 2$

Point	Quantités fabriquées	Coût total
M_0	$x_0 = 10$ unités	$y_0 = 150$ €
M	$x = 12$ unités	$y = 160$ €

$\Delta y = y - y_0 = 10$ €

➔ **Solution**

Calcul et interprétation de l’élasticité sur l’arc M_0M

🔴 **Le calcul :**

$$e_{M_0M} = \frac{\frac{\Delta y}{y_0} \times 100}{\frac{\Delta x}{x_0} \times 100} = \frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{\frac{10}{150}}{\frac{2}{10}} = \frac{10 \times 10}{150 \times 2} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$$

🔴 **Interprétation :**

$$e_{M_0M} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\text{Taux d'accroissement de } y \text{ entre } y_0 \text{ et } y_0 + \Delta y}{\text{Taux d'accroissement de } x \text{ entre } x_0 \text{ et } x_0 + \Delta x} = \frac{1}{3}$$

En passant d’une quantité fabriquée de 10 à 12 unités, le taux d’accroissement du coût total y est égal à $\frac{1}{3}$ du taux d’accroissement de la quantité fabriquée x .

3. **Cas où les quantités varient dans un intervalle (données « continues ») : élasticité ponctuelle**

On l’obtient en deux temps : on transforme l’écriture de l’élasticité d’arc et on effectue un passage à la limite.

🔴 **Transformation de l’écriture :**

$$e_{M_0M} = \frac{\frac{\Delta y}{y_0} \times 100}{\frac{\Delta x}{x_0} \times 100} = \frac{\frac{\Delta y}{y_0}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{x_0 \times \Delta y}{y_0 \times \Delta x} = x_0 \times \frac{\Delta y}{y_0 \times \Delta x} = \boxed{x_0 \times \frac{\Delta y}{y_0}}$$

➡ Passage à la limite :

On sait que : $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) = f'(x_0)$

Par suite, l'élasticité ponctuelle de f au point x_0 s'écrit :

$$e_f(x_0) = x_0 \times \frac{f'(x_0)}{y_0} = x_0 \times \frac{y'(x_0)}{y_0} (= e_{y/x}(x_0))$$

On retiendra de préférence l'écriture de l'élasticité ponctuelle de f en un point x quelconque :

$$e_f = x \times \frac{y'}{y} = x \times \frac{f'(x)}{f(x)} = e_{y/x}$$

Définition *Elasticité ponctuelle [important]*

L'élasticité ponctuelle de f ou de y par rapport à x en un point x quelconque s'écrit :

$$e_f = x \times \frac{f'(x)}{f(x)} = x \times \frac{y'}{y} = e_{y/x}$$

Interprétation

L'élasticité ponctuelle s'interprète comme l'élasticité d'arc, mais en un point donné :

$$e_{y/x} \approx \frac{\text{Taux d'accroissement de } y}{\text{Taux d'accroissement de } x}$$

➡ **Exemple**

Calculer l'élasticité ponctuelle $e_{y/x}$ de la fonction définie par : $y = f(x) = x^2 e^{-3x}$

Application : on suppose alors que $x = 1$. Si x diminue de 2 %, donner une valeur approchée du pourcentage d'augmentation (ou de diminution) de y .

➡ **Solution**

Calcul de l'élasticité ponctuelle de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 e^{-3x}$

🔍 Analyse :

L'élasticité ponctuelle de la fonction f s'écrit : $e_f = x \times \frac{f'(x)}{f(x)}$

Pour pouvoir la déterminer, il est préférable de calculer à part la dérivée $f'(x)$.

➡ Calcul de la dérivée :

$$\begin{aligned} f &= u v \\ f' &= u' v + u v' \end{aligned} \quad \text{Avec : } \begin{cases} u(x) = x^2 & u'(x) = 2x \\ v(x) = e^{-3x} = e^w & v'(x) = w' e^w = (-3x)' e^{-3x} = -3e^{-3x} \end{cases}$$

Pour x réel, on a :

$$f'(x) = 2x e^{-3x} + x^2 (-3e^{-3x})$$

$$f'(x) = x e^{-3x} (2 - 3x)$$

➡ Elasticité ponctuelle :

$$e_{y/x} = x \times \frac{y'}{y} = x \times \frac{f'(x)}{f(x)} = x \times \frac{x e^{-3x} (2 - 3x)}{x^2 e^{-3x}} = \frac{x^2 e^{-3x} (2 - 3x)}{x^2 e^{-3x}} = \boxed{2 - 3x}$$

Application numérique et interprétation

Application numérique :

Pour $x = 1$, on a : $e_{y/x} = 2 - 3 \times 1 = \boxed{-1}$

Interprétation :

On sait que : $e_{y/x} \approx \frac{\text{Taux d'accroissement de } y}{\text{Taux d'accroissement de } x}$

D'où : Taux d'accroissement de $y \approx e_{y/x} \times \text{Taux d'accroissement de } x$

Soit ici : Taux d'accroissement de $y \approx -1 \times (-2 \%) = \boxed{+2 \%}$

Enfin : Taux d'accroissement de $y \approx \boxed{+2 \%}$

Conclusion :

Si, en partant de la valeur $x = 1$, x diminue de 2 %, alors y augmentera d'environ 2 %.

CH IV - FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES

OBJECTIFS :

- ➡ Dérivées partielles du 1^{er} et du 2nd ordre
- ➡ Optimisation sans contrainte d'une fonction de deux variables
- ➡ Optimisation sous contrainte d'une fonction de deux variables

I – Dérivées partielles du 1^{er} et du 2nd ordre

1 Dérivées partielles du premier ordre

Soit f une fonction définie sur un ensemble ouvert I de $\mathbf{R}^2$ contenant (x_0, y_0) [$(x_0, y_0) \in I$].

a) Méthode pratique *Dérivées partielles du premier ordre d'une fonction de deux variables*

Pour calculer la dérivée partielle du premier ordre de $z = f(x, y)$:

Par rapport à x :

On dérive $z = f(x, y)$ en considérant x comme la **variable** et y comme une **constante**.

On obtient : soit f'_x ou z'_x (notations « allégées »), soit $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\frac{\partial z}{\partial x}$ (notations « classiques »).

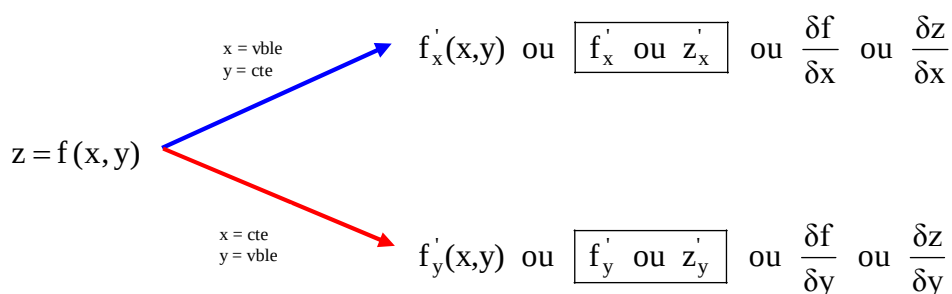
Par rapport à y :

On dérive $z = f(x, y)$ en considérant x comme une **constante** et y comme la **variable**.

On obtient : soit f'_y ou z'_y (notations « allégées »), soit $\frac{\partial f}{\partial y}$ ou $\frac{\partial z}{\partial y}$ (notations « classiques »).

b) Remarques

● Notations



Notations « allégées » : f'_x , z'_x , f'_y et z'_y (cours de Mathématiques)

Notations « classiques » : $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ (autres cours ?)

- Les règles de dérivation sont les mêmes que pour les fonctions d'une seule variable.

Exemple :

- 1 variable x :

$$f = \frac{u}{v} \longrightarrow f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

- 2 variables x et y :

$$f = \frac{u}{v} \begin{cases} \longrightarrow f'_x = \frac{u'_x v - u v'_x}{v^2} \\ \longrightarrow f'_y = \frac{u'_y v - u v'_y}{v^2} \end{cases}$$

- Dérivée d'une constante k :

Si la constante k est additive, la constante k disparaît. En effet : $(u + k)' = u' + \boxed{0}$

Si la constante k est multiplicative, la constante k subsiste. En effet : $(k \times u)' = \boxed{k} \times u'$

c) Etude d'un exemple

➡ Exemple *Calcul de dérivées partielles du premier ordre*

En utilisant les notations « allégées », calculer les dérivées partielles du 1^{er} ordre des fonctions suivantes :

- $z = f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 8y^2$
- $Y = f(K; L) = 10K^{0,45} L^{0,55}$ (Fonction de production de *Cobb-Douglas*)
- $L(a; b; \lambda) = 2\ln(3a) + 5\ln b + 12 + \lambda(16 - 2a - 7b)$ (trois variables : $a > 0$, $b > 0$, λ (lambda) réel)

➡ Solution

- Dérivées partielles du 1^{er} ordre de $z = f(x, y) = x^3 + 5x^2y + 8y^2$

- Calcul de f'_x (x = variable et y = constante)

$$f'_x = 3x^2 + 5(2x)y + 0 = \boxed{3x^2 + 10xy}$$

- Calcul de f'_y (x = constante et y = variable)

$$f'_y = 0 + 5x^2(1) + 8(2y) = \boxed{5x^2 + 16y}$$

- Dérivées partielles du 1^{er} ordre de $Y = f(K; L) = 10K^{0,45} L^{0,55}$

- Calcul de Y'_K (K = variable et L = constante)

$$Y'_K = 10(0,45K^{0,45-1})L^{0,55} = \boxed{4,5K^{-0,55} L^{0,55}}$$

➡ Calcul de Y'_L (K = constante et L = variable)

$$Y'_L = 10K^{0,45} (0,55L^{0,55-1}) = \boxed{5,5 K^{0,45} L^{-0,45}}$$

3. Dérivées partielles du 1^{er} ordre de $L(a; b; \lambda) = 2\ln(3a) + 5\ln b + 12 + \lambda(16 - 2a - 7b)$

On rappelle que : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

➡ Calcul de L'_a (a = variable ; b = constante ; λ = constante)

$$L'_a = 2 \frac{(3a)'}{3a} + 5 \times 0 + 0 + \lambda(0 - 2 \times 1 - 7 \times 0) = 2 \frac{3}{3a} + 0 + 0 + \lambda(0 - 2 - 0) = \boxed{\frac{2}{a} - 2\lambda}$$

➡ Calcul de L'_b (a = constante ; b = variable ; λ = constante)

$$L'_b = 2 \times 0 + 5 \frac{(b)'}{b} + 0 + \lambda(0 - 2 \times 0 - 7 \times 1) = 0 + 5 \frac{1}{b} + 0 + \lambda(0 - 0 - 7) = \boxed{\frac{5}{b} - 7\lambda}$$

➡ Calcul de L'_λ (a = constante ; b = constante ; λ = variable)

$$L'_\lambda = 2 \times 0 + 5 \times 0 + 0 + (\lambda)'(16 - 2a - 7b) = 0 + 0 + 0 + 1(16 - 2a - 7b) = \boxed{16 - 2a - 7b}$$

d) Applications à l'Economie

➡ Application n°1 *Dérivée partielle du premier ordre = fonction marginale*

Un consommateur achète deux biens A et B en quantités x et y. Son niveau de satisfaction est mesuré par la fonction d'utilité : $U(x; y) = 5x^2y + 2xy^2$

Calculer les utilités marginales U'_x et U'_y des deux biens A et B.

➡ Solution

1. Utilités marginales des biens A et B

➡ Bien A : (x = variable, y = constante)

$$U'_x = 5(2x)y + 2(1)y^2 = \boxed{10xy + 2y^2}$$

➡ Bien B : (x = constante, y = variable)

$$U'_y = 5x^2(1) + 2x(2y) = \boxed{5x^2 + 4xy}$$

➡ Application n°2 *Elasticité ponctuelle partielle*

Soit la fonction de production de Cobb-Douglas : $Y = Y(K; L) = 10K^{0,45}L^{0,55}$

En utilisant le résultat (bas de la page 2) : $Y'_K = 4,5K^{-0,55}L^{0,55}$, calculer l'élasticité ponctuelle partielle de la production Y par rapport au capital K. Interpréter.



UN RAPPEL

Cas d’une fonction à une variable x : $y = f(x)$

Elasticité ponctuelle	Formule	Interprétation
De y par rapport à x	$e_f = e_{y/x} = x \frac{y'}{y}$	$e_{y/x} \approx \frac{\text{Taux d'accroissement de } y}{\text{Taux d'accroissement de } x}$

Cas d’une fonction à deux variables x et y : $z = f(x, y)$

Elasticité ponctuelle	Formule	Interprétation
De z par rapport à x	$e_{z/x} = x \frac{z'_x}{z}$	$e_{z/x} \approx \frac{\text{Taux d'accroissement de } z}{\text{Taux d'accroissement de } x}$ (la variable y restant constante)
De z par rapport à y	$e_{z/y} = y \frac{z'_y}{z}$	$e_{z/y} \approx \frac{\text{Taux d'accroissement de } z}{\text{Taux d'accroissement de } y}$ (la variable x restant constante)

Solution

Elasticité ponctuelle partielle de la production Y par rapport au capital K

Calcul : (K = variable, L = constante)

$$e_{Y/K} = K \frac{Y'_K}{Y}$$

Par définition de l’élasticité partielle

$$e_{Y/K} = K \frac{4,5K^{-0,55} L^{0,55}}{10K^{0,45} L^{0,55}}$$

On remplace Y et Y'_K par leur valeur

$$e_{Y/K} = \frac{4,5}{10} \times K \frac{K^{-0,55}}{K^{0,45}} \times \frac{L^{0,55}}{L^{0,55}}$$

On isole les variables identiques afin de simplifier

$$e_{Y/K} = 0,45 \times \frac{K K^{-0,55}}{K^{0,45}} \times 1$$

On simplifie

$$e_{Y/K} = 0,45 \times \frac{K^{0,45}}{K^{0,45}}$$

$$e_{Y/K} = 0,45$$

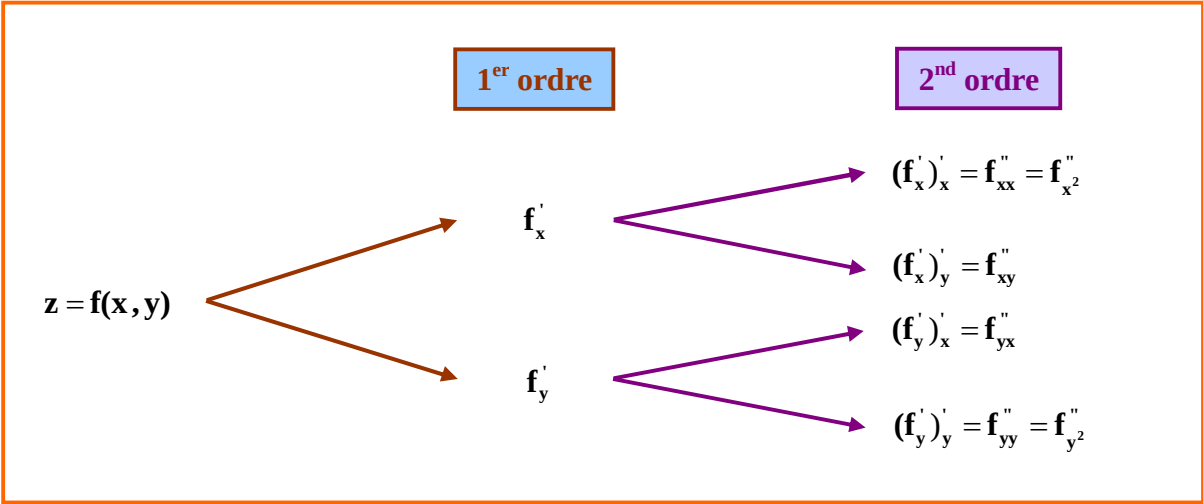
Interprétation :

$$e_{Y/K} = 0,45 \Leftrightarrow \frac{\text{taux de croissance de } Y}{\text{taux de croissance de } K (L = \text{cte})} = 0,45$$

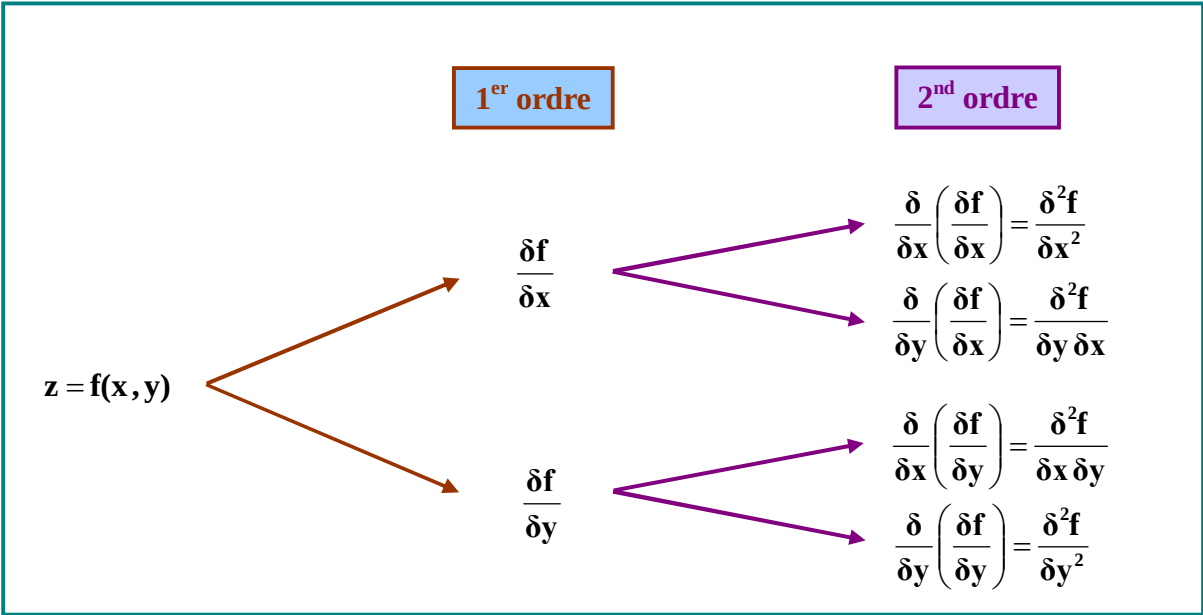
Ainsi, en partant d’un niveau donné de capital et de travail, si on augmente de 1 % la quantité de capital K (la quantité de travail L restant constante, les économistes disent : « toutes choses étant égales par ailleurs »), alors la production Y augmentera de 0,45 %.

2 Dérivées partielles du second ordre

Notations « allégées » :



Notations « classiques » :



Il existe donc, à priori, 4 dérivées partielles du second ordre distinctes. En fait, dans la pratique, il n'y en a que 3 : c'est le théorème de Schwarz.

Théorème de Schwarz

Egalité des dérivées partielles secondes « croisées »

Si f est une fonction admettant des dérivées partielles du second ordre continues, alors on a :

Notations « allégées » :

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Notations « classiques » :

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 f}{\delta y \delta x}$$

Autrement dit, peu importe l'ordre de dérivation : on obtient le même résultat, que l'on dérive d'abord par rapport à x , puis par rapport à y ou bien d'abord par rapport à y , puis par rapport à x .

Cette propriété permet, dans une certaine mesure, de vérifier les calculs.

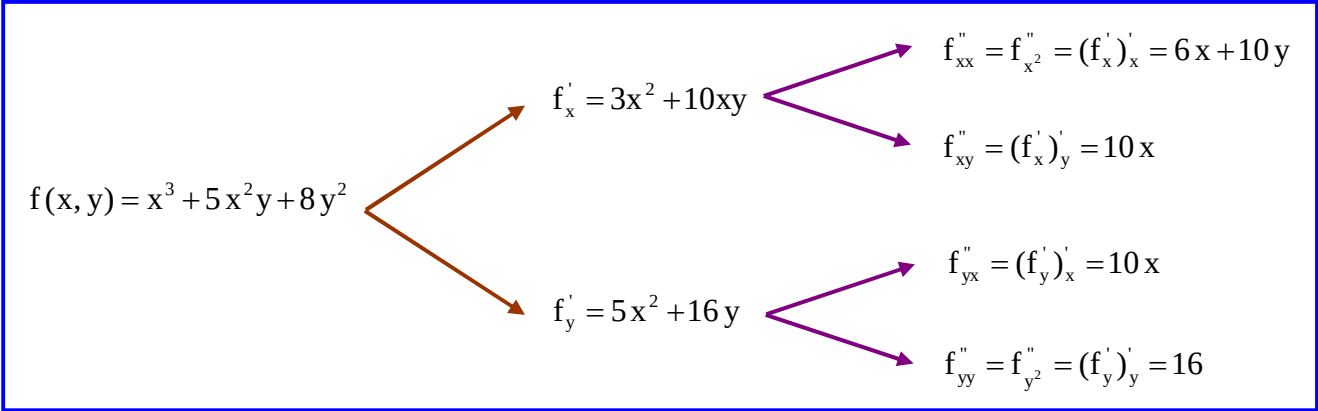
➡ **Exemple 1**

Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction f telle que : $z = f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 8y^2$

➡ **Solution**

Calcul des dérivées partielles du second ordre de la fonction f telle que : $z = f(x; y) = x^3 + 5x^2y + 8y^2$

Les dérivées partielles du second ordre se calculent facilement : on peut adopter la présentation en arbre :



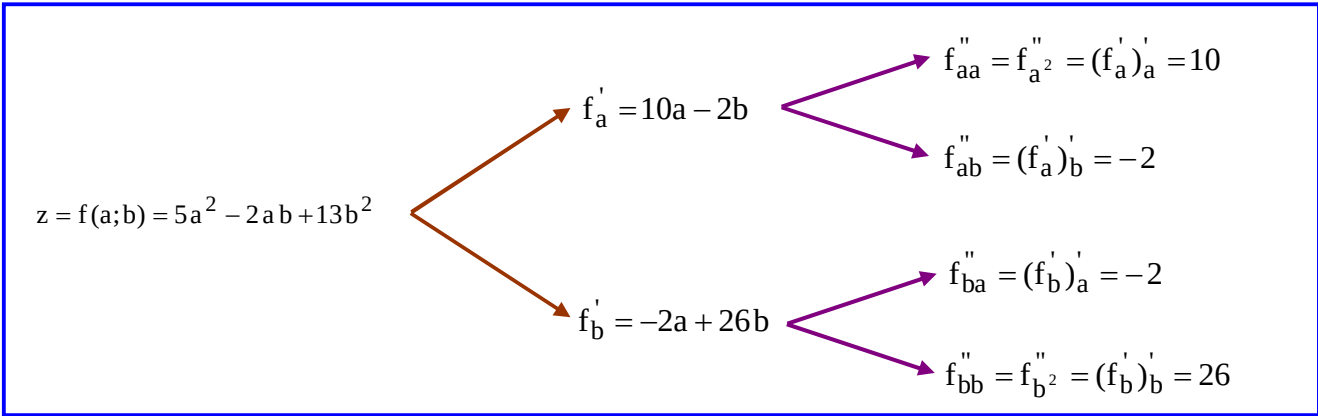
➡ **Exemple 2**

Calculer les dérivées partielles du second ordre de la fonction f telle que : $z = f(a; b) = 5a^2 - 2ab + 13b^2$

➡ **Solution**

Dérivées partielles du second ordre de la fonction f telle que : $z = f(a; b) = 5a^2 - 2ab + 13b^2$

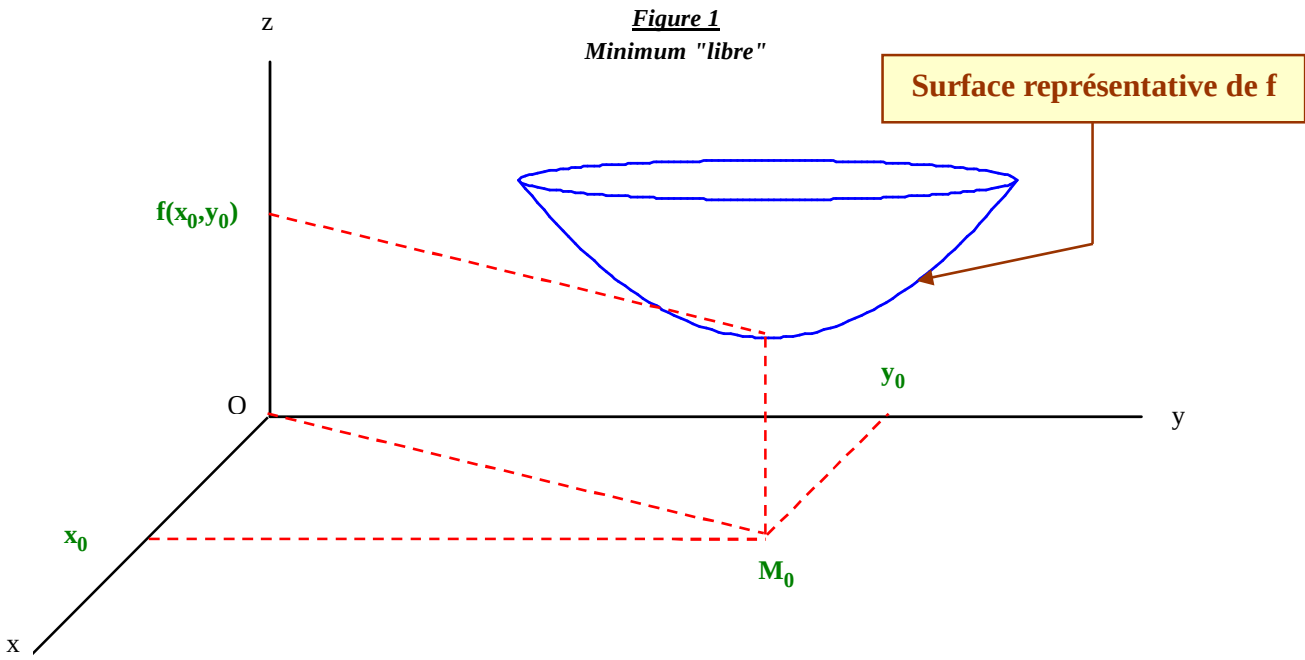
Les dérivées partielles du second ordre se calculent facilement : on peut adopter la présentation en arbre :



II – Optimisation sans contrainte d’une fonction de deux variables

But : Déterminer les « **extremums libres** » (**minimums** ou **maximums**) d’une fonction f de deux variables indépendantes, c’est-à-dire non liées l’une à l’autre par une quelconque relation, définie et admettant des dérivées partielles du second ordre continues sur un ensemble ouvert du plan.

1 Illustration : le cas d’un minimum libre



La fonction f admet un **minimum libre** au point $M_0 \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$ égal à $f(M_0) = f(x_0; y_0)$

2 Détermination pratique

a) Notations de Monge

Elles sont basées sur la **connaissance de l’ordre alphabétique**.
Voici le classement dans l’ordre alphabétique :

- ➡ des trois lettres suivantes : **r** – **s** – **t**
- ➡ des trois « couples de lettres » : **(x ; x)** – **(x ; y)** – **(y ; y)**

On associe à chacune des trois lettres r, s et t , la dérivée partielle seconde correspondant à l’ordre alphabétique précédent.

Ainsi, au point $M_0 \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right.$, on retiendra :

$$\left. \begin{matrix} r_0 = f''_{xx}(M_0) \\ s_0 = f''_{xy}(M_0) \\ t_0 = f''_{yy}(M_0) \end{matrix} \right\} \text{Notations de Monge}$$

b) Méthode pratique *Les conditions du premier ordre et du second ordre*

 **1^{ère} étape** : Recherche des points stationnaires ou critiques

- ➡ On calcule les dérivées partielles du **premier ordre** de f , soit : f'_x et f'_y
- ➡ On résout dans $\mathbf{R}^2$ le système : $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ (c’est la condition nécessaire du premier ordre).

Les points $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$, solutions du système précédent sont seuls susceptibles d'être des extremums libres de f . Ce sont les points stationnaires (ou points critiques).

2^{nde} étape : Nature des points stationnaires

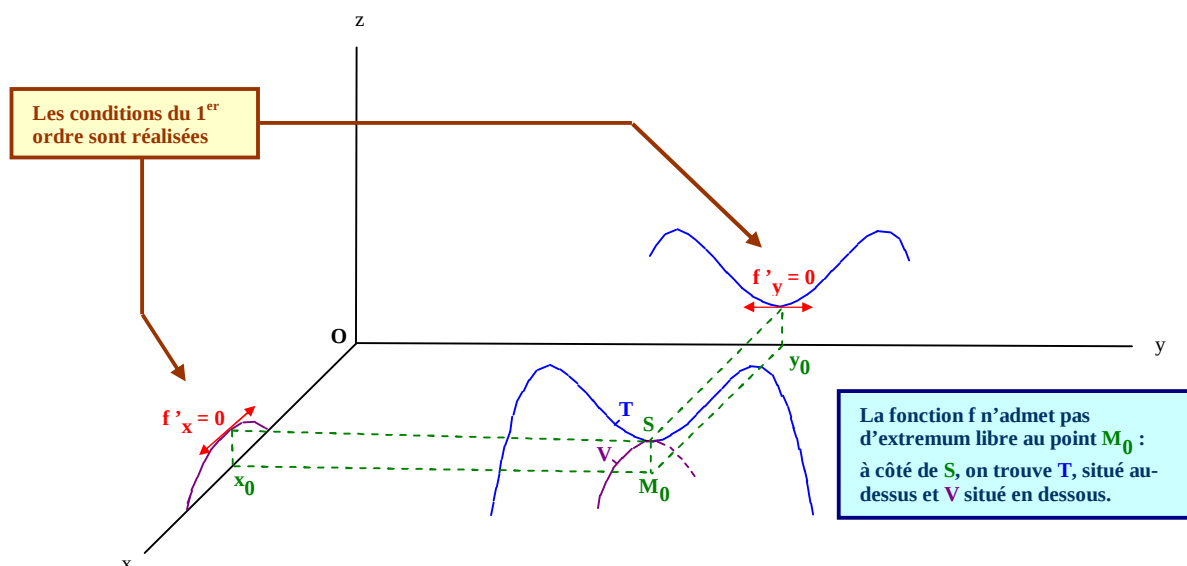
- On calcule les dérivées partielles du second ordre de f , soit : f''_{xx} , $f''_{xy}(=f''_{yx})$ et f''_{yy}
- On détermine leur valeur en un point stationnaire $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ en utilisant les notations de Monge :
 $r_0 = f''_{xx}(M_0)$, $s_0 = f''_{xy}(M_0)$ et $t_0 = f''_{yy}(M_0)$
- On évalue la valeur et le signe de : $r_0 t_0 - s_0^2$. On a alors la condition suffisante du second ordre :
- Si on a : $\left. \begin{matrix} r_0 t_0 - s_0^2 > 0 \\ r_0 > 0 \end{matrix} \right\}$, alors f admet au point M_0 un minimum libre.
- Si on a : $\left. \begin{matrix} r_0 t_0 - s_0^2 > 0 \\ r_0 < 0 \end{matrix} \right\}$, alors f admet au point M_0 un maximum libre.

c) Remarques

- Si : $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$, alors f admet au point M_0 un extremum libre.
 Le signe de r_0 permet de préciser sa nature : maximum si $r_0 < 0$ ou bien minimum si $r_0 > 0$.
- Si : $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$, alors il faut une étude approfondie (*hors programme*).
- Si : $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$, alors f admet au point M_0 un point-col ou un point-selle.

Un point-col ou un point-selle n'est ni un « maximum libre », ni un « minimum libre ».

figure 6
Point-col ou point-selle



La fonction f n'admet pas d'extremum libre au point-selle $M_0 \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$. En effet, on observe dans le plan (xOz) un maximum et dans le plan (yOz) un minimum.

Avec un peu d'imagination, la surface représentative de f évoque un **col en montagne** ou encore une **selle de cheval**, d'où le nom donné à ce type de point.

- Si la fonction f a plus de deux variables, la condition nécessaire du premier ordre s'applique de même, mais la condition du second ordre est beaucoup plus compliquée (hors programme).

Ainsi, si : $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2 + 5xyz$, on recherchera les extremums libres de f parmi les points

$$\text{vérifiant la condition nécessaire du premier ordre : } \begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \\ f'_z = 0 \end{cases}$$

3 Exemples

➔ Exemple 1 *Exemple important*

Soit la fonction f des variables x et y telle que : $f(x, y) = -2x^2 + 6xy - 5y^2 - 40x + 70y + 750$

Déterminer le point stationnaire de f .

Etudier sa nature. S'il s'agit d'un extremum, préciser la valeur de f en ce point.

➔ Solution

1^{ère} étape : Recherche du point stationnaire

Calcul des dérivées partielles du premier ordre de f :

$$f'_x = -4x + 6y - 40 \qquad f'_y = 6x - 10y + 70$$

Condition nécessaire du premier ordre :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

On résout dans $\mathbf{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 6y - 40 = 0 & (1) \\ 6x - 10y + 70 = 0 & (2) \end{cases}$$

Calcul de y :

On multiplie les deux membres de l'équation (1) par 3 et ceux de l'équation (2) par 2 :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12x + 18y - 120 = 0 \\ 12x - 20y + 140 = 0 \end{cases}$$

On additionne membre à membre afin d'éliminer x :

$$(-12x + 18y - 120) + (12x - 20y + 140) = 0 + 0$$

On supprime les parenthèses et on regroupe : x avec x , y avec y , constante avec constante :

$$-12x + 12x + 18y - 20y - 120 + 140 = 0 \qquad \text{On calcule :}$$

$$-2y + 20 = 0$$

$$20 = 2y$$

$10 = y$

Calcul de x :

On remplace y par sa valeur dans l'une des deux équations, par exemple l'équation (2) :

$$6x - 10y + 70 = 0 \Leftrightarrow 6x - 10 \times 10 + 70 = 0 \Leftrightarrow 6x - 100 + 70 = 0 \Leftrightarrow 6x - 30 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = 5}$$

Conclusion :

On a donc un point stationnaire : $A \begin{vmatrix} 5 \\ 10 \end{vmatrix}$



2^{nde} étape : Nature du point stationnaire



Calcul des dérivées partielles du second ordre de f :

$$f''_{xx} = f''_{x^2} = -4$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 6$$

$$f''_{yy} = f''_{y^2} = -10$$



Notations de Monge :

On remplace dans chaque dérivée partielle 2^{nde}, x par 5 et y par 10 (ici, chaque dérivée partielle 2^{nde} est constante, il n'y a donc rien à faire) :

$$r_0 = f''_{x^2}(5;10) = \boxed{-4}$$

$$s_0 = f''_{xy}(5;10) = \boxed{6}$$

$$t_0 = f''_{y^2}(5;10) = \boxed{-10}$$



Condition suffisante du second ordre :

✓ On calcule l'expression :

$$r_0 t_0 - s_0^2 = (-4) \times (-10) - 6^2 = 40 - 36 = \boxed{4}$$

✓ On évalue son signe (et celui de r_0 si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$) pour en déduire la nature du point stationnaire :

$$\left. \begin{array}{l} r_0 t_0 - s_0^2 = 4 > 0 \\ r_0 = -4 < 0 \end{array} \right\} \text{ Donc } f \text{ admet au point } A \begin{vmatrix} 5 \\ 10 \end{vmatrix} \text{ un maximum libre}$$

✓ On détermine la valeur prise par f en son maximum libre :

$$f(A) = f(5;10) = -2 \times 5^2 + 6 \times 5 \times 10 - 5 \times 10^2 - 40 \times 5 + 70 \times 10 + 750$$

$$f(A) = f(5;10) = -50 + 300 - 500 - 200 + 700 + 750$$

$$f(A) = f(5;10) = \boxed{1000}$$



Exemple 2

Cas avec plusieurs points stationnaires

Déterminer les extremums libres de la fonction f suivante telle que : $z = f(x;y) = x^2 y + x^2 + 2y^2$



Solution



1^{ère} étape : Recherche des points stationnaires



Calcul des dérivées partielles du premier ordre de f :

$$f'_x = 2xy + 2x$$

$$f'_y = x^2 + 4y$$



Condition nécessaire du premier ordre :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$$

On résout dans $\mathbf{R}^2$ le système :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy + 2x = 0 & (1) \\ x^2 + 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

On factorise $2x$ dans l'équation (1) :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(y+1) = 0 \\ x^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

On utilise la règle du produit nul :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \text{ ou } y+1 = 0 \\ x^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

On envisage les deux cas possibles :

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x^2 + 4y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y+1 = 0 \\ x^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 0^2 + 4y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} y = -1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Conclusion :

On a donc 3 points stationnaires :	$M_0 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	$M_1 \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix}$	$M_2 \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$
------------------------------------	--	--	---



2^{nde} étape : Nature des points stationnaires

👉 Calcul des dérivées partielles du second ordre de f :

$$f''_{xx} = f''_{x^2} = 2y + 2$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 2x$$

$$f''_{yy} = f''_{y^2} = 4$$

► 1^{er} point stationnaire : $M_0 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

👉 Notations de Monge :

On remplace dans chaque dérivée partielle 2^{nde}, x par 0 et y par 0 :

$$r_0 = f''_{x^2}(0;0) = 2 \times 0 + 2 = \boxed{2}$$

$$s_0 = f''_{xy}(0;0) = 2 \times 0 = \boxed{0}$$

$$t_0 = f''_{y^2}(0;0) = \boxed{4}$$

👉 Condition suffisante du second ordre :

✓ On calcule l'expression :

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 2 \times 4 - 0^2 = \boxed{8}$$

✓ On évalue son signe (et celui de r_0 si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$) pour en déduire la nature du point stationnaire :

$$\left. \begin{array}{l} r_0 t_0 - s_0^2 = 8 > 0 \\ r_0 = 2 > 0 \end{array} \right\} \text{ Donc } f \text{ admet au point } M_0 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \text{ un minimum libre}$$

- ✓ On détermine la valeur prise par f en son minimum libre :

$$f(M_0) = f(0;0) = 0^2 \times 0 + 0^2 + 2 \times 0^2 = \boxed{0}$$

► 2nd point stationnaire : $M_1 \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix}$

🔑 Notations de Monge :

On remplace dans chaque dérivée partielle 2^{nde}, x par -2 et y par -1 :

$$r_0 = f''_{xx}(-2; -1) = 2 \times (-1) + 2 = -2 + 2 = \boxed{0}$$

$$s_0 = f''_{xy}(-2; -1) = 2 \times (-2) = \boxed{-4}$$

$$t_0 = f''_{yy}(-2; -1) = \boxed{4}$$

🟢 Condition suffisante du second ordre :

- ✓ On calcule l'expression :

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0 \times 4 - (-4)^2 = \boxed{-16}$$

- ✓ On évalue son signe (et celui de r_0 si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$) pour en déduire la nature du point stationnaire :

$$r_0 t_0 - s_0^2 = -16 < 0 \text{ Donc } f \text{ admet au point } M_1 \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix} \text{ un point-col ou un point-selle}$$

- ✓ On ne détermine pas la valeur prise par f en un point-col ou un point-selle.

► 3^{ème} point stationnaire : $M_2 \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$

🔑 Notations de Monge :

On remplace dans chaque dérivée partielle 2^{nde}, x par 2 et y par -1 :

$$r_0 = f''_{xx}(2; -1) = 2 \times (-1) + 2 = -2 + 2 = \boxed{0}$$

$$s_0 = f''_{xy}(2; -1) = 2 \times 2 = \boxed{4}$$

$$t_0 = f''_{yy}(2; -1) = \boxed{4}$$

🟢 Condition suffisante du second ordre :

- ✓ On calcule l'expression :

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0 \times 4 - 4^2 = \boxed{-16}$$

- ✓ On évalue son signe (et celui de r_0 si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$) pour en déduire la nature du point stationnaire :

$$r_0 t_0 - s_0^2 = -16 < 0 \text{ Donc } f \text{ admet au point } M_1 \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \end{vmatrix} \text{ un point-col ou un point-selle}$$

- ✓ On ne détermine pas la valeur prise par f en un point-col ou un point-selle.

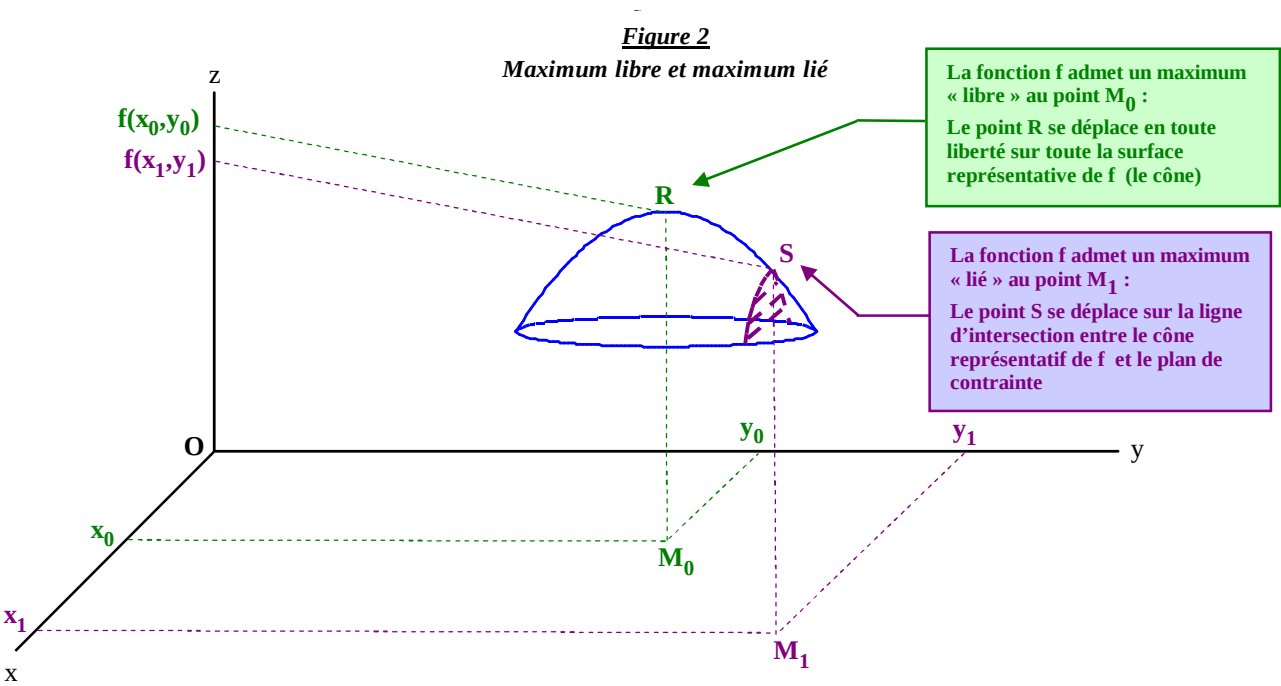
III – Optimisation sous contrainte d’une fonction de deux variables

But : Déterminer les « **extremums liés** » (**minimums** ou **maximums**) d’une fonction f de deux variables x et y telle que : $z = f(x; y)$, les variables x et y étant dépendantes l’une de l’autre, c’est-à-dire liées par une contrainte que l’on écrira sous la forme : $g(x; y) = 0$

On dispose ainsi de :

La fonction à optimiser ou fonction objectif définie par :	$f(x; y)$	} à ne pas confondre
La fonction contrainte définie par :	$g(x; y)$	
La contrainte définie par :	$g(x; y) = 0$	

Le schéma suivant montre la différence entre un **maximum libre** (le point R situé au plus haut sur la surface représentative de f) et un **maximum lié** (le point S situé au plus haut sur l’intersection de la surface représentative de f et du plan violacé représentant ici la contrainte)



On dispose, en pratique, de **deux méthodes** pour effectuer une optimisation sous contrainte :

- La **méthode par substitution** : c’est la méthode la plus simple et elle est applicable la plupart du temps.
- La **méthode du Lagrangien** : c’est une méthode plus complexe, mais utilisée en Economie

1 La méthode par substitution

a) Exposé de la méthode



1^{ère} étape : Exprimer dans la contrainte une variable en fonction de l'autre



En partant de la contrainte : $g(x; y) = 0$, on exprime une variable en fonction de l'autre (x en fonction de y ou bien, comme ici, y en fonction de x) :

$$g(x; y) = 0 \Leftrightarrow y = h(x)$$



2^{nde} étape : Substituer dans la fonction objectif (à optimiser)



On remplace y par h(x) dans la fonction à optimiser $f(x; y)$: $f(x; y) = f(x, h(x)) = H(x)$.

Intérêt : on passe d'une optimisation d'une fonction f à deux variables x et y à une optimisation d'une fonction H à une seule variable x.



3^{ème} étape : Optimiser la fonction H à une variable x

Pour cela, deux techniques (Cf. CH II) :



Calcul de la dérivée de H – Valeurs x_0 annulant la dérivée – Tableau de variations – Analyse



Calcul de la dérivée de H – Valeurs x_0 annulant la dérivée – Calcul de la dérivée seconde – Signe de la dérivée seconde aux points x_0



4^{ème} étape : Calculer la valeur y_0 correspondant aux valeurs x_0 : $y_0 = h(x_0)$



On connaît ainsi les couples (x_0, y_0) solutions du problème posé.

b) Exemples

➔ Exemple 1

Exemple important

On veut rechercher les extremums liés de la fonction f définie par : $f(x, y) = xy + 10y + 100$ sous la contrainte : $x + 3y = 50$

1. Exprimer x en fonction de y dans la contrainte.
2. Substituer x par sa valeur en fonction de y dans $f(x, y)$. Déterminer les extremums de la fonction H(y) ainsi obtenue.
3. Conclure par rapport au problème initial.

➔ Solution



1^{ère} étape : Exprimer dans la contrainte la variable x en fonction de y

La contrainte permet d'exprimer facilement x en fonction de y :

$$x + 3y = 50 \Leftrightarrow \boxed{x = 50 - 3y = h(y)}$$



2^{nde} étape : Substituer dans la fonction objectif (à optimiser)

On remplace x par sa valeur en fonction de y dans la fonction à optimiser de façon à obtenir une fonction notée H(y) à une seule variable y :

$$f(x, y) = xy + 10y + 100 \text{ et } x = 50 - 3y \Rightarrow f(50 - 3y; y) = (50 - 3y)y + 10y + 100 = H(y)$$

Attention : bien mettre $50 - 3y$ entre parenthèses

Développons alors les calculs afin de simplifier l'expression de $H(y)$:

$$H(y) = (50 - 3y)y + 10y + 100$$

$$H(y) = 50y - 3y^2 + 10y + 100$$

$$H(y) = \boxed{-3y^2 + 60y + 100}$$

L'expression précédente représente la fonction à optimiser tout en tenant compte de la contrainte.

L'objectif, dès lors, est donc de rechercher les extremums de cette fonction H qui est une fonction à une seule variable y .

 **3^{ème} étape :** Optimiser la fonction H à une variable y (« *méthode des économistes* »)

 Calcul de $H'(y)$:

$$\text{Pour } y \text{ réel : } H'(y) = \boxed{-6y + 60}$$

 Valeur annulant $H'(y)$:

$$H'(y) = 0 \Leftrightarrow -6y + 60 = 0 \Leftrightarrow 60 = 6y \Leftrightarrow \boxed{10 = y}$$

 Calcul de $H''(y)$:

$$\text{Pour } y \text{ réel : } H''(y) = \boxed{-6}$$

 Evaluation du signe de $H''(10)$ et nature de l'extremum :

$$H''(y = 10) = \boxed{-6 < 0}$$

Donc la fonction H admet un maximum au point $y = 10$ égal à :

$$H(10) = -3 \times 10^2 + 60 \times 10 + 100 = -3 \times 100 + 600 + 100 = -300 + 600 + 100 = \boxed{400}$$

 **4^{ème} étape :** Conclusion

La fonction f telle que : $f(x, y) = xy + 10y + 100$, sous la contrainte : $x + 3y = 50$, admet un **maximum lié** au point A de coordonnées : $x = 50 - 3y = 50 - 3 \times 10 = 50 - 30 = \boxed{20}$ et $y = \boxed{10}$ égal à :

$$f(20; 10) = 20 \times 10 + 10 \times 10 + 100 = 200 + 100 + 100 = \boxed{400} [= H(10)]$$

 **Exemple 2** *Maximisation de l'utilité du consommateur sous contrainte budgétaire*

Un consommateur rationnel désire acheter deux biens A et B , de prix unitaires : $p_A = 2 \text{ €}$ et $p_B = 1 \text{ €}$.

Il dispose pour cela d'un budget de 40 € qu'il consacre en totalité à l'achat de ces deux biens. Sa fonction d'utilité s'écrit : $U = 2xy$ où x et y représentent les quantités achetées des deux biens A et B .

Le consommateur désire maximiser son utilité U compte tenu de sa « contrainte budgétaire ».

1. Définir de façon claire la fonction à optimiser et la contrainte.
2. Déterminer les quantités x et y qu'il cherchera à acquérir à l'aide de la méthode par substitution

➡ Solution

1. Mise en forme du problème

👉 La contrainte budgétaire :

Si le consommateur achète x unités du bien A au prix unitaire $p_A = 2 \text{ €}$ et y unités du bien B au prix unitaire $p_B = 1 \text{ €}$, sa dépense totale D vaut : $D = p_A \times x + p_B \times y = 2 \times x + 1 \times y = \boxed{2x + y}$

Sachant qu'il consacre la totalité de son budget à l'achat de ces deux biens, on a :

$$D = 40 \Leftrightarrow \boxed{2x + y = 40}$$

👉 Le problème :

Ainsi ce consommateur veut maximiser son utilité : $U = 2xy$ sous la contrainte : $2x + y = 40$

2. Maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire par la méthode par substitution

👁️ 1^{ère} étape : Exprimer dans la contrainte une variable en fonction de l'autre

La contrainte permet d'exprimer facilement y en fonction de x :

$$2x + y = 40 \Leftrightarrow \boxed{y = 40 - 2x = h(x)}$$

👁️ 2^{nde} étape : Substituer dans la fonction objectif (à optimiser)

On remplace y par sa valeur en fonction de x dans l'utilité, de façon à obtenir une fonction à une seule variable x :

$$U(x; y) = 2xy \text{ et } y = 40 - 2x \Rightarrow U(x; h(x)) = H(x) = 2x(40 - 2x) = \boxed{80x - 4x^2}$$

👁️ 3^{ème} étape : Maximiser la fonction H à une variable x (« **méthode des économistes** »)

👉 Calcul de $H'(x)$:

$$\text{Pour } x \geq 0, \text{ on a : } H'(x) = \boxed{80 - 8x}$$

👉 Valeur annulant $H'(x)$:

$$H'(x) = 0 \Leftrightarrow 80 - 8x = 0 \Leftrightarrow 80 = 8x \Leftrightarrow \frac{80}{8} = x \Leftrightarrow \boxed{x = 10 = x_0}$$

👉 Calcul de $H''(x)$:

$$\text{Pour } x \geq 0, \text{ on a : } H''(x) = \boxed{-8}$$

👉 Evaluation du signe de $H''(10)$:

$$H''(10) = \boxed{-8 < 0}$$

Donc, H admet un maximum lorsque $x = x_0 = 10$ égal à :

$$H(10) = 80 \times 10 - 4 \times 10^2 = 800 - 400 = \boxed{400} [= U(10; h(10))]$$

👁️ 4^{ème} étape : Conclusion

Ainsi, le consommateur maximise son utilité U lorsque : $x = \boxed{10}$ et $y = h(10) = 40 - 2 \times 10 = \boxed{20}$, c'est-à-dire en achetant 10 unités du bien A et 20 unités du bien B.

$$\text{Son utilité maximale vaut : } U(10; 20) = H(10) = \boxed{400}$$

2 La méthode du Lagrangien

C'est une méthode plus compliquée, qui consiste, après avoir déterminé le Lagrangien, en deux points :

- Condition nécessaire du premier ordre
- Condition suffisante du second ordre

Seul le premier point sera abordé ici.

a) Exposé de la méthode



1^{ère} étape : Déterminer l'expression du Lagrangien

- Définir la fonction à optimiser ou fonction objectif, que nous noterons $f(x; y)$
- Ecrire la contrainte obligatoirement sous la forme : $g(x; y) = 0$ (avec 0 dans le second membre). Cela permet de définir la « fonction contrainte » $g(x; y)$
- Le Lagrangien est une fonction de trois variables : x ; y et λ (« lambda »), appelé multiplicateur de Lagrange. Il s'écrit :
 $L(x; y; \lambda) = \text{fonction à optimiser} + \lambda \times \text{fonction contrainte}$
Soit ici :

$$L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda \times g(x; y)$$



2^{nde} étape : Recherche des points stationnaires

- Calculer les dérivées partielles premières du Lagrangien : L'_x , L'_y et L'_λ
- Appliquer la condition nécessaire du premier ordre, obtenue en annulant les dérivées partielles premières du Lagrangien.

$$\text{On résout le système : } \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$



3^{ème} étape : Nature des points stationnaires

- Elle consiste à appliquer la condition suffisante du second ordre. Difficile à mettre en œuvre, elle sera supposée vérifiée dans tous les exercices abordés.

b) Etude d'un exemple

➔ Exemple *Maximisation de l'utilité du consommateur sous contrainte budgétaire*

Soit la fonction d'utilité : $U(x, y) = xy + x + y$ où x et y représentent les quantités de deux biens A et B. De plus, on donne leurs prix unitaires respectifs : $p_A = 2 \text{ €}$ et $p_B = 3 \text{ €}$.

Le consommateur désire maximiser son utilité U pour un niveau de budget donné de 31 €.

1. Définir le Lagrangien.
2. Déterminer les quantités x et y qu'il cherchera à acquérir.

➔ Solution

1. Détermination du Lagrangien

👉 La fonction à optimiser ou fonction objectif :

Il s'agit de l'utilité du consommateur qui mesure son niveau de satisfaction : $U(x, y) = xy + x + y$

👉 La contrainte budgétaire :

Si le consommateur achète x unités du bien A au prix unitaire $p_A = 2$ € et y unités du bien B au prix unitaire $p_B = 3$ €, sa dépense totale D vaut : $D = p_A \times x + p_B \times y = 2 \times x + 3 \times y = \boxed{2x + 3y}$

Sachant qu'il consacre la totalité de son budget à l'achat de ces deux biens, on a :

$$D = 31 \Leftrightarrow \boxed{2x + 3y = 31}$$

👉 La « fonction contrainte » :

Il s'agit d'écrire la contrainte budgétaire en plaçant obligatoirement 0 dans le second membre. Ainsi, le premier membre constitue la « fonction contrainte » :

$$2x + 3y = 31 \Leftrightarrow 2x + 3y - 31 = 0 \Rightarrow \boxed{g(x; y) = 2x + 3y - 31}$$

👉 Le Lagrangien :

Il s'écrit :

$L(x; y; \lambda)$ = fonction à optimiser + $\lambda \times$ fonction contrainte

$$L(x; y; \lambda) = U(x; y) + \lambda \times g(x; y)$$

$$\boxed{L(x; y; \lambda) = xy + x + y + \lambda \times (2x + 3y - 31)}$$

👁️ 2^{nde} étape : Recherche des points stationnaires

👉 Calcul des dérivées partielles du premier ordre du Lagrangien :

On obtient successivement :

$$L'_x = (1)y + 1 + 0 + \lambda \times [2(1) + 0 - 0] \Leftrightarrow \boxed{L'_x = y + 1 + 2\lambda}$$

$$L'_y = x(1) + 0 + 1 + \lambda \times [0 + 3(1) - 0] \Leftrightarrow \boxed{L'_y = x + 1 + 3\lambda}$$

$$L'_\lambda = 0 + 0 + 0 + (1) \times (2x + 3y - 31) \Leftrightarrow \boxed{L'_\lambda = 2x + 3y - 31}$$

👉 Condition nécessaire du premier ordre :

Elle consiste à annuler simultanément les dérivées partielles du premier ordre du Lagrangien :

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 1 + 2\lambda = 0 & (1) \\ x + 1 + 3\lambda = 0 & (2) \\ 2x + 3y - 31 = 0 & (3) \end{cases} \quad \text{L'équation (3) n'est autre que la contrainte}$$

Il existe plusieurs façons de résoudre ce système. Toutefois, les économistes adoptent une technique « standard » qui sera utilisée ici.

➤ A partir des équations (1) et (2), on exprime λ

$$\begin{cases} y + 1 + 2\lambda = 0 & (1) \\ x + 1 + 3\lambda = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda = -y - 1 \\ 3\lambda = -x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{-y-1}{2} \\ \lambda = \frac{-x-1}{3} \end{cases}$$

► On égale les valeurs de λ afin d'obtenir une relation entre x et y

$$\lambda = \lambda \Leftrightarrow \frac{-y-1}{2} = \frac{-x-1}{3}$$

On fait le « produit en croix »

$$\lambda = \lambda \Leftrightarrow 3(-y-1) = 2(-x-1)$$

On développe

$$\lambda = \lambda \Leftrightarrow -3y-3 = -2x-2$$

On multiplie les deux membres par (-1)

$$\lambda = \lambda \Leftrightarrow 3y+3 = 2x+2$$

On isole le terme en x, par exemple

$$\lambda = \lambda \Leftrightarrow 3y+3-2 = 2x$$

$$\lambda = \lambda \Leftrightarrow 3y+1 = 2x$$

D'où la relation entre x et y

$$\lambda = \lambda \Leftrightarrow \boxed{\frac{3y+1}{2} = x}$$

► On intègre dans l'équation (3) la relation obtenue

$$2x+3y-31=0 \quad (3) \Leftrightarrow 2\left(\frac{3y+1}{2}\right)+3y-31=0$$

$$2x+3y-31=0 \quad (3) \Leftrightarrow 3y+1+3y-31=0$$

$$2x+3y-31=0 \quad (3) \Leftrightarrow 6y-30=0$$

$$2x+3y-31=0 \quad (3) \Leftrightarrow y = \frac{30}{6}$$

$$2x+3y-31=0 \quad (3) \Leftrightarrow \boxed{y=5}$$

► On calcule x (et éventuellement λ) pour terminer

$$x = \frac{3y+1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3 \times 5 + 1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{16}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=8}$$

$$\lambda = \frac{-y-1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-5-1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-6}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lambda=-3}$$



3^{ème} étape : Nature des points stationnaires – Conclusion

On suppose la condition du second ordre satisfaite : il s'agit d'un maximum lié. On peut donc affirmer que ce consommateur, compte tenu de sa contrainte budgétaire, achètera $x = 8$ unités du bien A et $y = 5$ unités du bien B pour maximiser son utilité qui vaut, dans ce cas :

$$U(8;5) = 8 \times 5 + 8 + 5 = \boxed{53}$$