

RATTRAPAGE 17 JUIN 2020

Durée : 03 heures.

**Documents, calculatrices, ordinateurs et téléphones portables non autorisés.
Le sujet comporte deux pages.**

Le barème est sur ? points. Une note supérieure à 20 sera ramenée à 20.

QUESTIONS DE COURS

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E .

1. Définir ce qu'est pour f une valeur propre, un vecteur propre, un sous-espace propre et un sous-espace caractéristique.
2. Définir le polynôme caractéristique χ_f et le polynôme minimal μ_f de f .
3. Énoncer le théorème de Cayley-Hamilton.
4. Énoncer le théorème de décomposition de Dunford.

EXERCICE 1

Soit $n \geq 2$ un entier. Considérons pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ suivante :

$$A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $\text{Det}(A(\alpha))$ pour tout $n \geq 2$.
2. À quelle(s) condition(s) sur α , la matrice $A(\alpha)$ est-elle inversible ?
3. Dans le cas où $A(\alpha)$ n'est pas inversible, déterminer le rang de $A(\alpha)$.

EXERCICE 2

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^3 = u$.

1. Trouver un polynôme annulateur de u et en déduire que u est diagonalisable.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
3. Quels sont les polynômes minimaux possibles de u ?

EXERCICE 3

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit u l'endomorphisme de E défini par sa matrice relativement à la base $\mathcal{B}$:

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique $\chi_u(X)$ de u et en déduire que le spectre de u est $\{0, 1\}$.
2. On note V_0 (resp. V_1) le sous-espace propre de u associé à 0 (resp. 1).
 - (a) Déterminer V_0 et V_1 .
 - (b) L'endomorphisme u est-il diagonalisable ? trigonalisable ? Justifier précisément votre réponse.
 - (c) On note f_1 et f_2 les vecteurs propres respectivement associés à 0 et 1 et dont la première colonne est égale à 1. Déterminer f_1 et f_2 .
3. Montrer qu'il existe un unique vecteur

$$f_3 = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3$$

tel que $u(f_3) = f_2 + f_3$ et $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 4$

4. Montrer que f_3 appartient à $\text{Ker}((u - id_E)^2)$ et que (f_2, f_3) est une base de $\text{Ker}((u - id_E)^2)$.
5. Montrer que $E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}((u - id_E)^2)$ et en déduire que $\mathcal{C} := (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
6. Soit B la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ et P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.
 - (a) Déterminer B et montrer que $A = PBP^{-1}$,
 - (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Calculer P^{-1}

7. Calculer A^n pour tout entier n .

Fin de l'énoncé.