Chapitre 1

TD1 - Relation d'équivalence, ensemble quotient

Exercice 1

Si X est un ensemble quelconque, on désigne par $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X. Soient deux ensembles E et F.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
2. Montrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$.
3. Donner un exemple prouvant que l'inclusion réciproque de l'inclusion de la question 2 n'est pas vraie en général.

Exercice 2

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ suivante

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), \quad \Big(x\mathcal{R}y\Big) \Longleftrightarrow \Big(x^3 - y^3 = x - y\Big).$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul. Sur l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$, on définit la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\forall y \in \mathbb{Z}), \quad \Big(x\mathcal{R}y\Big) \Longleftrightarrow \Big(n \text{ divise } x - y\Big).$$

1. Montrer que la relation $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
2. Montrer que cette relation est compatible avec la somme et le produit de $\mathbb{Z}$.
3. Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/_{\mathcal{R}}$. Cet ensemble quotient est noté $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.

Exercice 4

On définit, sur l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, la relation $\mathcal{R}$ suivante

$$\Big(\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\Big)\Big(\forall (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*\Big), \quad \Big((a,b)\mathcal{R}(c,d)\Big) \Longleftrightarrow \Big(ad = bc\Big).$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.

2. A tout élément, $cl\Big((a,b)\Big)$ de l'ensemble quotient $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_{\mathcal{R}}$ on associe le nombre rationnel $\dfrac{a}{b}$.

$$\varphi : cl\Big((a,b)\Big)\mapsto \frac{a}{b}.$$

Montrer que φ est bien définie et que c'est une bijection de l'ensemble quotient $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/_{\mathcal{R}}$ sur $\mathbb{Q}$.

3. Sur $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ on définit une addition et une multiplication par

$$\Big(\forall (a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\Big)\Big(\forall (c,d)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*\Big),\quad (a,b)+(c,d)=(ad+bc,bd)\quad\text{et}\quad (a,b).(c,d)=(ac,bd).$$

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$.

Exercice 5

On définit sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{R}$ suivante :

$$\Big((a,b)\in\mathbb{R}^2\Big)\Big((c,d)\in\mathbb{R}^2\Big),\quad (a,b)\mathcal{R}(c,d)\Longleftrightarrow (a-c,b-d)\in\mathbb{Z}^2.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que cette relation est compatible avec la somme de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que l'ensemble quotient $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ est en bijection avec le sous-ensemble

$$T^2=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 \mid |z|=1=|w|\}$$

de $\mathbb{C}^2$ par le biais de l'application $f : c\ell\Big((a,b)\Big)\mapsto (e^{2i\pi a},e^{2i\pi b})$.

Exercice 6

Soit ω un nombre réel strictement positif. On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ suivante

$$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\quad \Big(x\mathcal{R}y\Big)\Longleftrightarrow\Big((\exists k\in\mathbb{Z}),\quad y=x+k\omega\Big).$$

1. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble quotient $\mathbb{R}/_{\mathcal{R}}$ est en bijection avec l'intervalle $[0,\omega[$.

Exercice 7

Considérons deux ensembles non vides E et F. Soit f une application de E dans F.

1. Montrer que la relation sur E définie par

$$x\sim y\Longleftrightarrow f(x)=f(y)$$

est une relation d'équivalence.

2. Soit π l'application canonique de E dans l'ensemble quotient $E/_{\sim}$. Montrer qu'il existe une unique application $\bar{f}$ de $E/_{\sim}$ dans F telle que $f=\bar{f}\circ\pi$.
3. Montrer que $\bar{f}$ est injective.

Exercice 8

Partiel 2019-2020 : 4 points

1. Montrer que $\mathcal{P}:=\Big(U_n : [n,n+2[\Big)_{n\in 2\mathbb{Z}}$ est une partition de $\mathbb{R}$.

2. Donner la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ associée à cette partition $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $c\ell(\frac{1}{2}) = c\ell(\frac{19}{10})$ et que $c\ell(\frac{5}{2}) \neq c\ell(\frac{39}{10})$.
4. En déduire que la relation $\mathcal{R}$ n'est pas compatible avec la loi + (l'addition) sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 9

CT 2019-2020 : 4 points

Soient E un ensemble non vide et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Sur $\mathcal{P}(E)$, on considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A\mathcal{R}B \iff A = B \text{ ou } A = E\backslash B.$$

1. Motrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$.
2. Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.
3. $\mathcal{R}$ est-elle compatible avec la loi intersection "$\cap$" sur $\mathcal{P}(E)$?

Chapitre 2

TD2 - Introduction aux groupes

Exercice 10

Sur l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q}$, on définit la loi $*$ par

$$(\forall a \in \mathbb{Q})(\forall b \in \mathbb{Q}), \quad a * b = \frac{a+b}{2}.$$

La loi $*$ est-elle associative ?

Exercice 11

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), \qquad x * y = xy + (x^2 - 1)(y^2 - 1).$$

Montrer que la loi $*$ est commutative, non associative et que 1 est un élément neutre.

Exercice 12

On définit sur $\mathbb{R}_+$ la loi $*$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+)(\forall y \in \mathbb{R}_+), \qquad x * y = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Montrer que la loi $*$ est commutative, associative, 0 est un élément neutre et qu'auncun élément de $\mathbb{R}_+^*$ n'a de symétrie pour $*$.

Exercice 13

Sur l'ensemble des nombres rationnels, $\mathbb{Q}$, on définit la loi $*$ par

$$(\forall a \in \mathbb{Q})(\forall b \in \mathbb{Q}), \quad a * b = a + b + ab.$$

Montrer que $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$ est un groupe.

Exercice 14

Soit $(G, *)$ un groupe et A un ensemble. On note $\mathcal{F}(A, G)$ l'ensemble des applications de A dans G, muni de la loi $\perp$ définie par

$$\Big(\forall f \in \mathcal{F}(A,G)\Big)\Big(\forall g \in \mathcal{F}(A,G)\Big)(\forall x \in A), \quad (f \perp g)(x) = f(x) * g(x).$$

Montrer que $\Big(\mathcal{F}(A,G), \perp\Big)$ est un groupe.

Exercice 15

Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne associative notée $*$.
On suppose que dans $(G, *)$ les deux conditions suivantes sont vérifiées :

— il existe un élément neutre à droite

$$(\exists e \in G)(\forall g \in G), \quad g * e = g.$$

— tout élément g de G admet un symétrique à droite g' (i.e. $g * g' = e$).

1. Montrer que tout élément x de G est inversible.
2. Montrer que e est un élément neutre dans $(G, *)$.
3. Conclure.

EXERCICE 16

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$ on définit la loi $*$ par

$$\Big(\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2\Big)\Big(\forall (a',b') \in \mathbb{R}^2\Big), \quad (a,b) * (a',b') = (a - 2a', b + 3b').$$

$(\mathbb{R}^2, *)$ est-il un groupe ?

EXERCICE 17

Sur l'ensemble $E =]-1, 1[$ on définit la loi $*$ par

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E), \quad x * y = \frac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(E, *)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 18

Montrer que tout sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ est de la forme $n\mathbb{Z}$, n est un entier naturel.

EXERCICE 19

Soit G un sous-groupe non trivial du groupe $(\mathbb{R}, +)$.
(1) Montrer que l'intersection $G \cap \mathbb{R}_+^*$ est non vide.
(2) On pose $r = inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$. Montrer que r est positif ou nul.
(3) On suppose que $r > 0$. A l'aide de la définition de r, montrer que $G = r\mathbb{Z} = \{rk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
(4) On suppose $r = 0$. On veut montrer que, pour tout réel y et tout réel $\varepsilon > 0$, l'intersection $G \cap]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ est non vide. On dit que G est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $a \in G \cap \mathbb{R}_+^*$ tel que $0 < a < \varepsilon$.
2. Soit y un nombre réel. A l'aide de la partie entière du nombre réel $\dfrac{y}{a}$, montrer que l'intersection $G \cap]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$ est non vide.

EXERCICE 20

On note $1, i, j, k$ les matrices suivantes de $\mathcal{M}(2, \mathbb{C})$:

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad j = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad k = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}.$$

Montrer que la multiplication des matrices définit une loi interne sur

$$\mathbb{H}_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$

Montrer que $\mathbb{H}_8$ muni de cette loi est un groupe non abélien. On l'appelle le groupe des quaternions ou encore le groupe quaternionique.

EXERCICE 21

On considère les matrices suivantes du groupe linéaire $GL(2,\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que A et B sont d'ordres finis tandis que AB est d'ordre infini.

EXERCICE 22

On considère un groupe abélien G et des éléments a et b de G d'ordres finis. On note

$$r = ord(a) \text{ et } s = ord(b)$$

et on suppose que r et s sont premiers entre eux.

(1) Montrer que $ord(ab) = rs$.
(2) Montrer que le sous-groupe engendré par les deux éléments a et b est égal au sous-groupe engendré par l'élément ab ($< a, b > = < ab >$).

EXERCICE 23

On définit sur $\mathbb{R}$ la loi $*$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), \qquad x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}.$$

Montrer que l'application $f : x \mapsto x^3$ de $\Big(\mathbb{R}, *\Big)$ dans $\Big(\mathbb{R}, +\Big)$ est un isomorphisme. En déduire que $\Big(\mathbb{R}, *\Big)$ est un groupe abélien (commutatif).

EXERCICE 24

Sur l'ensemble $E =]-1, 1[$ on définit la loi $*$ par

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E), \quad x * y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = th(x).$$

Montrer que f est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(E, *)$. (Voir exercice 17).

EXERCICE 25

On note $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.
(1) Montrer que la multiplication des nombres complexes définit une structure de groupe sur $\mathbb{C}^*$.
(2) Vérifier que l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.
(3) Montrer que l'application

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}_+^*, \quad z \mapsto |z|$$

est un morphisme de groupe. On note $\mathbb{U}$ le noyau de ce morphisme f.
(4) Construire un isomorphisme de groupes de $\mathbb{C}^*$ vers le groupe produit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$.

EXERCICE 26

Soit $(A,.)$ un groupe abélien et $E=\{-1;1\}$. Soit $G=A\times E$. On munit G de la loi

$$(\forall a\in A)(\forall b\in A)(\forall x\in E)(\forall y\in E),\qquad (a,x).(b,y)=(ab^x,xy).$$

1) Montrer que $(G,.)$ est un groupe.

2) On suppose, dans cette question, que A est fini d'ordre n.

2.1) Montrer que G est fini d'ordre $2n$.

2.2) Montrer que G contient au moins n éléments d'ordre 2.

2.3) Donner une condition suffisante pour que G contienne, au moins, $n+1$ éléments d'ordre 2.

EXERCICE 27

Soit G un groupe abélien fini et H, K deux sous-groupes de G. On note

$$HK=\{hk, h\in H \text{ et } k\in K\}.$$

1) Montrer que HK est un sous-groupe de G.
2) Soit $\varphi: H\times K\to HK$ l'application définie par $\varphi(h,k)=hk$.

2.1) Montrer que φ est un morphisme de groupes.
2.2) Déterminer l'image de φ et montrer que

$$\ker\varphi=\{(h,h^{-1}), h\in H\cap K\}.$$

2.3) Montrer que HK est isomorphe à un quotient du groupe $H\times K$ par un sous-groupe bien choisi.
2.4) En déduire que $|HK|=\dfrac{|H||K|}{|H\cap K|}$.

EXERCICE 28

Partiel 2019-2020 : 4 points
Soit $(G,.)$ un groupe (non commutatif). Un sous-groupe H de $(G,.)$ est dit distingué si

$$(\forall x\in G)(\forall h\in H),\qquad x.h.x^{-1}\in H.$$

1. Soient $(G',.)$ un groupe et f un mporphisme de groupes de G dans G'. Montrer que le noyau de f est un sous-groupe distingué de $(G,.)$. (**2pts**)
2. Soient H et K deux sous-groupes de $(G,.)$. Montrer que si H est un sous-groupe distingué de $(G,.)$, alors l'ensemble

   $$HK:=\{hk \mid h\in H \text{ et } k\in K\}$$

   est un sous-groupe de $(G,.)$. (**2pts**)

EXERCICE 29

Partiel 2019-2020 : 8 points
(I) Soit $(\mathcal{C},.)$ un groupe monogène engendré par $x\in\mathcal{C}$ (c'est-à-dire $\mathcal{C}=<x>$).

Montrer que si A est un sous-groupe de $(\mathcal{C}, .)$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A soit engendré par x^k (c'est-à-dire $A =< x^k >$). (**2pts**)
Indication : Si $A \neq \{e_{\mathcal{C}}\}$ (où $e_{\mathcal{C}}$ est l'élément neutre de $\mathcal{C}$), k est le plus petit entier naturel non nul tel que $x^k \in A$.

(II) Soit $(G, .)$ un groupe non réduit à son élément neutre e_G. On définit K comme l'intersection de tous les sous-groupes H de G tel que $H \neq \{e_G\}$, c'est-à-dire

$$K = \bigcap_{H \in \mathcal{P}} H$$

où $\mathcal{P} := \{H \mid \text{H est un sous-groupe de } G \text{ différent de } \{e_G\}\}$.

1. Montrer que K est sous-groupe de $(G, .)$. (**1pt**)
2. On suppose pour toute la suite que $K \neq \{e_G\}$. Soit $a \in G$ un élément différent de e_G.
   (a) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K =< a^n >$. (On pourra utiliser (I)). (**1pt**)
   (b) On suppose que a est d'ordre infini.
      i. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $H_k =< a^k >$. Montrer que $H_k \subset H_m$ si, et seulement si, m divise k. (**2pts**)
      ii. En déduire que $n = 0$. (**1pt**)
   (c) En déduire que tout élément de G est d'ordre fini. (**1pt**)

EXERCICE 30

CT - 2019-2020 : 4 points
Soient $(G, .)$ et $(G', .)$ deux groupes et soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes.

1. Soit x un élément d'ordre fini de G. Montrer que $f(x)$ est un élément d'ordre fini de G' et que l'ordre de x divise l'ordre de $f(x)$.
2. Si f est un isomorphisme de groupes, montrer que pour tout $a \in G$, l'ordre de a est égal à l'ordre de $f(a)$.

3. En déduire que le groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls $(\mathbb{C}^*, .)$ n'est pas isomorphe au groupe additif des nombres réels $(\mathbb{R}, +)$.

Chapitre 3

TD3 - Anneaux - Corps

Exercice 31

Soit $(G, *)$ un groupe abélien non réduit à son élément neutre e_G. Vérifier que l'ensemble $End(G)$, des morphismes de G dans G (endomorphismes de G), muni des deux lois de composition

$$(f, g) \mapsto f + g, \qquad (f, g) \mapsto f \circ g$$

définies par :

$$(\forall x \in G), \quad (f + g)(x) = f(x) * g(x) \quad \text{et} \quad (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

est un anneau.

Exercice 32

CT - 2019-2020
On considère le corps des nombres réels $(\mathbb{R}, +, .)$. On définit deux nouvelles lois $\star$ et T sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \;\; x \star y := \;\; x + y - 2 \;\text{ et }\; x\, T\, y := \;\; x.y - 2x - 2y + 6.$$

1. Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un groupe commutatif.
2. Montrer que $(\mathbb{R}, \star, T)$ est un anneau commutatif.

Exercice 33

CT - 2019-2020

Soit d un entier naturel.
On considère $A_d := \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \;/\; d \text{ divise } y - x\}$.

1. Montrer que A_d est un sous-anneau de l'anneau produit $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \times)$.

2. Soit A un sous-anneau de l'anneau produit $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +, \times)$.
   (a) Pourquoi $(1, 1) \in A$? Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n, n) \in A$. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{Z}, (m, m) \in A$.
   (b) En déduire que si $(x, y) \in A$, alors $(x - y, 0) \in A$.
   (c) Montrer que $H := \{x \in \mathbb{Z} \;/\; (x, 0) \in A\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

(d) En déduire qu'il existe un entier naturel d tel que $A = A_d$.

EXERCICE 34

Soit $\mathbb{Z}[i]$ l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ib$, où a et b sont des entiers relatifs (où $i^2 = -1$), c'est-à-dire

$$\mathbb{Z}[i] := \{z \in \mathbb{C} \,/\, z := a + ib,\ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

On considère l'application $M : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}$ définie par : $M(a + ib) := a^2 + b^2,\ \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, .)$.
2. Montrer que $M(x.y) = M(x)M(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}[i]$.
3. Soit x un élément de $\mathbb{Z}[i]$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) x est inversible (c-à-d. $x \in \mathcal{U}(\mathbb{Z}[i])$);

(b) $M(x) = 1$;

(c) $x \in \{-1, -i, 1, i\}$.

4. En déduire que le groupe $(\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i]), .)$ est isomorphe au groupe $(\frac{\mathbb{Z}}{4\mathbb{Z}}, +)$.
5. Soi x un élément de $\mathbb{Z}[i]$. Montrer que si $M(x)$ est un entier premier, alors x est un élément irréductible de $\mathbb{Z}[i]$.
6. Soit $f : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$ un morphisme d'anneaux.
6.1. Montrer que $f(m) = m,\ \forall\, m \in \mathbb{Z}$ (indication : montrer que $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$, $puis f(-n) = -f(n), \forall n \in \mathbb{N}$).
6.2. Montrer que $f(i) \in \{-i, i\}$.
6.3. Montrer que $f(x) = x,\ \forall\, x \in \mathbb{Z}[i],$ ou $f(a + ib) = a - ib, \forall\, a, b \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 35

Soit E un ensemble non vide.
(1) Montrer qu'il existe une bijection $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{F}(E; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ telle que

$$\Big(\forall A \in \mathcal{P}(E)\Big)\Big(\forall B \in \mathcal{P}(E)\Big), \quad f(A\Delta B) = f(A) + f(B), \qquad f(A \cap B) = f(A).f(B).$$

(2) En déduire que $\Big(\mathcal{P}(E), \Delta, \Big)$ est un anneau commutatif : préciser son élément neutre, l'opposé d'un élément, son élément unité et ses éléments inversibles.

EXERCICE 36

Soit $A = \Big\{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in \mathbb{Z}\Big\}$.
(1) Montrer que $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \times)$.
(2) On considère l'application φ de A dans A définie par :

$$\Big(\forall m \in \mathbb{Z}\Big)\Big(\forall n \in \mathbb{Z}\Big), \quad \varphi(m + n\sqrt{2}) = m - n\sqrt{2}.$$

Montrer que φ est un automorphisme de l'anneau $(A, +, \times)$.
(3) Pour tout x dans A, on pose $N(x) = x\varphi(x)$. Montrer que N est une application de A dans $\mathbb{Z}$ qui est un morphisme pour la multiplication.
(4) Démontrer que x est un élément inversible de A si et seulement si $N(x) = \pm 1$.
(5) Soit $a + b\sqrt{2}$ tel que $a, b > 0$ un élément inversible de A. Montrer que $b \leq a < 2b$.
(6) Soit $a + b\sqrt{2}$ tel que $a, b > 0$ un élément inversible de A.

On note $a' + b'\sqrt{2} = (a + b\sqrt{2})(1 + \sqrt{2})^{-1}$. Montrer que $0 < a' \leq a$ et $0 \leq b' < b$. En déduire qu'il existe un entier naturel non nul n tel que $a + b\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^n$.
(7) Montrer que l'ensemble des éléments inversibles de A est $\mathbb{U}(A) = \Big\{\pm(1 + \sqrt{2})^n \mid n \in \mathbb{Z}\Big\}$.

EXERCICE 37

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soient a et b deux éléments de A.
(1) Montrer que si x est un élément inversible de A, alors x n'est pas un diviseur de zéro dans A.
(2) On suppose que ba n'est pas un diviseur de zéro dans A. Montrer que ab est inversible si et seulement si a et b le sont.
Indication : Si c est l'inverse de ab, calculer $(ba)(bca - 1)$.

EXERCICE 38

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Soient a et b deux éléments de A.
Montrer que si $1 - ab$ est inversible, alors $1 - ba$ est inversible.

EXERCICE 39

Montrer qu'un anneau intègre et fini est un corps.

EXERCICE 40

Soit A un anneau intègre. Montrer que l'anneau $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.
Idée : Pour a dans A^*, on pourra considérer l'idéal $aA[X] + XA[X]$.

EXERCICE 41

Soit d un entier naturel tel que $\sqrt{d}$ n'est pas un nombre rationnel. On note

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] = \Big\{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\Big\}.$$

Montrer que $\Big(\mathbb{Q}[\sqrt{d}], +, \times\Big)$ est un corps.

EXERCICE 42

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Soit I un idéal de A. On appelle radical de I l'ensemble

$$\sqrt{I} = \Big\{x \in A \mid (\exists n \in \mathbb{N}^*,\ x^n \in I\Big\}.$$

(1) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A.
(2) Soient I et J deux idéaux de A et p un entier naturel non nul. Montrer que

$$\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}, \quad \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I} \quad \text{et} \quad \sqrt{I^p} = \sqrt{I}.$$

(3) Si $A = \mathbb{Z}$ et $I = k\mathbb{Z}$, k dans $\mathbb{N}^*$, déterminer le radical de I.

EXERCICE 43

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Soit A l'anneau $\mathbb{K}[X, Y]$. Montrer que l'idéal $I = XA + YA$ n'est pas principal.

EXERCICE 44

Soit A un anneau intègre. Soient x et y deux éléments de A.
Montrer que l'idéal $I = xA + yA$ est principal si et seulement si il existe a, b, c, d, e dans A tel que

$$x = ab,\ y = ac,\ a = xd + ye.$$

EXERCICE 45

CT - 2019-2020 : 6 points

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif tel que $A \neq \{0_A\}$ et soit I un idéal de cet anneau. Rappelons que I est dit premier s'il vérifie :

$$\forall\, (x, y) \in A \times A,\ (x \times y \in I \ \Rightarrow\ x \in I \text{ ou } y \in I).$$

1. Montrer que I est un idéal premier de A si et seulement si l'anneau quotient A/I est intègre.

2. Dans cette question, on suppose que tous les idéaux de A sont premiers.
   (a) Montrer que A est un anneau intègre.
   (b) Soit x un élément de A. On considère l'idéal (x) de A engendré par x et l'idéal (x^2) de A engendré par $x^2 := x \times x$. Montrer que $(x) = (x^2)$.
   (c) En déduire que $(A, +, \times)$ est un corps commutatif.

3. Réciproquement, montrer que tous les idéaux d'un corps commutatif sont premiers.

Chapitre 4

TD4 Anneaux intègres - Anneaux quotients

Exercice 46

Soit $(A, +, .)$ un anneau intègre. Soient x, y et z dans A. Montrer que

1. $\Big[x|y \text{ et } y|z\Big] \Longrightarrow x|z$.
2. $(\forall (a, b) \in A^2)$, $\Big[x|y \text{ et } x|z\Big] \Longrightarrow x|ay + bz$.
3. $x \in U(A)$ si et seulement si $< x >= A$.
4. $x \in U(A)$ si et seulement si x divise a pour tout $a \in A$.
5. $\Big[x \in U(A) \text{ et } y|x\Big] \Longrightarrow y \in U(A)$.

Exercice 47

Soit $(A, +, .)$ un anneau intègre. Soient x et y deux éléments de A.

1. Montrer que x et y sont associés si et seulement si il existe un élément a inversible dans A tel que $x = ay$.
2. Montrer que x et y sont associés si et seulement si $< x >=< y >$.
3. Montrer que x et y sont associés alors x et y ont les mêmes diviseurs et ils ont les mêmes multiples.
4. On suppose, dans cette question, que x et y sont associés.
   (a) Montrer que x est irréductible si et seulement si y est inrréductible.
   (b) Montrer que x est premier si et seulement si y est premier.

Exercice 48

Soit $(A, +, .)$ un anneau principal. Montrer que si I est un idéal premier de A, alors I est un idéal maximal de A.

Exercice 49

Montrer que dans un anneau fini, tout idéal premier est maximal.

Exercice 50

Soit $(A, +, .)$ un anneau intègre. On suppose que dans A, toute suite décroissante d'idéaux est finie. Montrer que A est un corps.

Exercice 51

Soit $(A,+,.)$ un anneau principal. Soit I un idéal de A. Montrer que tous les idéaux de l'anneau quotient A/I sont principaux.

Exercice 52

Soient $(A,+,.)$ et $(B,+,.)$ deux anneaux. Soit f un morphisme d'anneaux de A vers B.

1. Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier J de B est un idéal premier de A.
2. Dans cette question $A=\mathbb{Z}$ et $B=\mathbb{Q}[X]$ et f définie par

$$(\forall n\in A),\qquad f(n)=n.$$

   (a) Montrer que l'idéal $J=(X)$ est maximal dans B.

   (b) Déterminer l'image réciproque de l'idéal $J=(X)$. Conclure.

   (c) $f(A)$ est-il un idéal de B ?

Exercice 53

On considère l'anneau $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficnets dans $\mathbb{R}$.

1. En utilisant la division euclidienne dans l'anneau $\mathbb{R}[X]$, montrer que tout idéal de l'anneau $\mathbb{R}[X]$ est un idéal principal.
2. En déduire que si P est un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ alors l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par P est un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$.
3. Quelle est la décomposition du polynôme X^4-1 en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
4. Soit I l'idéal de $\mathbb{R}[X]$ engendré par le polynôme X^4-1.

   (a) L'idéal I est-il un idéal premier de $\mathbb{R}[X]$?

   (b) L'idéal I est-il un idéal maximal de $\mathbb{R}[X]$?

   (c) Quels sont les idéaux maximaux de $\mathbb{R}[X]$ qui contiennent I ?

   (d) Quels sont les idéaux premiers de $\mathbb{R}[X]$ qui contiennent I ?
5. On considère l'anneau quotient $A=\mathbb{R}[X]/I$. l'anneau A est-il intègre ?
6. (a) Montrer que les polynômes X^2-5 et X^4-1 sont premiers entre eux dans $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Trouver les polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$U(X^2-5)+V(X^4-1)=1.$$

   (c) Montrer que $\overline{X^2-5}$ est un élément inversible de l'anneau A et donner son inverse.

   (d) Quel est l'idéal engendré par $\overline{X^2-5}$ dans A ?
7. Quels sont les idéaux maximaux de l'anneau A ?

Exercice 54

Soient $(A,+,.)$ un anneau et I et J deux idéaux de A. On considère la projection canoinque π_1 de A sur A/I et l'image $\bar{J}=\pi_1(J)$ de l'idéal J.

1. Montrer que $\bar{J}$ est un idéal de l'anneau quotient A/I.
2. En considérant le morphisme d'anneau $x+I\mapsto x+(I+J)$ de l'anneau A/I vers l'anneau $A/(I+J)$, montrer que $(A/I)/\bar{J}$ est isomorphe à $A/(I+J)$.