© R. Jamet ; © iStockphoto / Thinkstock, by Getty Images.

Formes mathématiques

En un seul coup de ciseaux !

Une citrouille d'Halloween est dessinée sur une feuille. Une fois pliée, on donne un seul coup de ciseaux, tout droit, et les yeux, le nez et la bouche apparaissent ! Comment réaliser le pliage adéquat pour découper une forme dans une feuille de papier avec un unique coup de ciseaux ? Quelles autres formes peut-on obtenir ainsi ? Nous allons voir dans cet article comment les mathématiques, et notamment la géométrie, interviennent dans ce « tour de magie ».

PAR **ISABELLE DUBOIS***, MAÎTRE DE CONFÉRENCES EN MATHÉMATIQUES À L'INSTITUT ÉLIE-CARTAN DE LORRAINE

Commençons par la forme la plus simple : dessinez un triangle sur une feuille. Comment plier cette dernière de telle sorte qu'avec un seul coup de ciseaux rectiligne, ce triangle (et seulement lui) soit découpé entièrement ? Les différents pliages effectués peuvent être partiels (le pli n'occupant pas toute la largeur de la feuille) ou simultanés (plusieurs plis se forment lors d'un même mouvement). En revanche, le pliage doit s'exécuter « à plat » et s'achever par un unique coup de ciseaux, le long d'un segment droit.

Nous pouvons reformuler l'énoncé, afin de mieux comprendre la tâche à réaliser : il s'agit de trouver un ensemble de plis permettant de superposer tous les côtés du triangle dessiné le long d'un même segment. Si cette condition est remplie, il suffit de découper alors le papier au niveau de ce segment : les trois côtés du triangle sont effectivement tous découpés simultanément et le triangle se détache du reste de la feuille. Essayez donc, avec des triangles particuliers (équilatéraux ou isocèles) pour débuter. Il peut être utile de

* Auteur de sujets pour MATh.en.JEANS au nombre desquels celui de l'article.

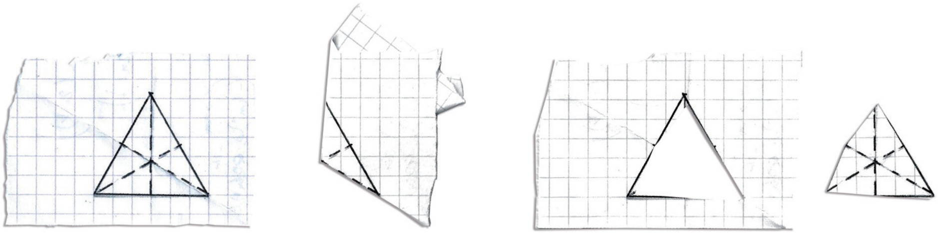

Figure 1. **Pliages à effectuer avant de découper un triangle équilatéral.** © I. Dubois.

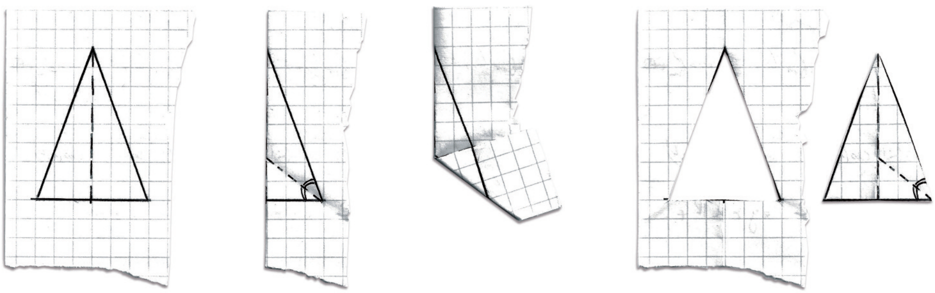

Figure 2. **Pliages à effectuer avant de découper un triangle isocèle.** © I. Dubois.

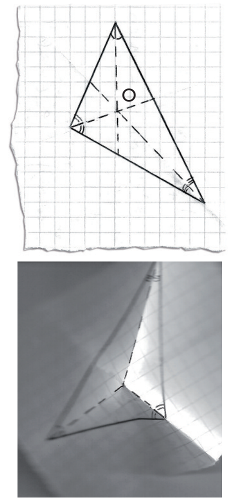

Figure 3. **Pliages selon les bissectrices d'un triangle quelconque.** © I. Dubois.

prendre une feuille de papier calque afin d'appréhender plus facilement les superpositions à effectuer.

TRIANGLE, À NOUS DEUX !

Voici des solutions au défi proposé. Considérons d'abord le cas des triangles particuliers, et plus spécifiquement celui du triangle équilatéral, dont les longueurs des trois côtés sont égales et qui possède le plus d'axes de symétrie : trois. Justement, si nous plions le triangle équilatéral suivant deux de ses axes, le problème est résolu (fig. 1). Compliquons un peu la situation et intéressons-nous au triangle isocèle, dont seulement deux des côtés ont même longueur. Il présente un axe de symétrie partant du sommet principal (fig. 2). Plions selon cet axe : nous superposons les deux côtés de même longueur. Il suffit maintenant de plier une fois de plus pour amener le troisième côté sur ces deux côtés rassemblés, le long de la ligne qui coupe l'angle restant en deux parties égales. Cette droite est en fait l'axe de symétrie de cet angle, bien qu'elle ne constitue pas un axe de symétrie du triangle, et est appelée sa bissectrice. Un coup de ciseaux et le tour est joué !

QUAND LE TRIANGLE DEVIENT QUELCONQUE…

Et pour un triangle qui n'est ni isocèle ni équilatéral ? Puisque le triangle ne possède pas d'axe de symétrie, nous allons utiliser les bissectrices des différents angles du triangle, comme nous le suggère le dernier pli effectué dans le cas du triangle isocèle. À noter que ces droites se rejoignent nécessairement en un même point, que nous noterons O. Il ne faut pas effectuer de pliage au-delà de ce point, car ce n'est que du côté de l'angle que ce pli est intéressant : la bissectrice n'est généralement pas perpendiculaire au côté qu'elle coupe, et les deux « morceaux » de ce dernier ne se superposeront donc pas. Cependant, on s'aperçoit que si l'on ne plie que selon les portions de bissectrices comprises entre l'angle et le point O de façon simultanée, le pliage obtenu n'est pas « à plat », et ne résout donc pas notre problème (fig. 3). C'est en partie dû au fait que le théorème de Kawasaki, concernant le nombre de plis en O, n'est pas vérifié (encadré *Deux théorèmes d'origami*).

Ainsi s'impose la nécessité de trouver des plis supplémentaires qui permettent de superposer les côtés du triangle dans un pliage à plat. Une idée vient assez naturellement en manipulant la feuille à partir de la configuration précédente : ajouter les perpendiculaires à chaque côté du triangle passant par O (fig. 4). Les nouveaux plis créés constituent en effet des axes de symétrie des droites portant les côtés du triangle : les

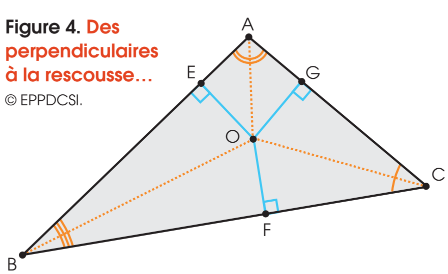

Figure 4. **Des perpendiculaires à la rescousse…** © EPPDCSI.

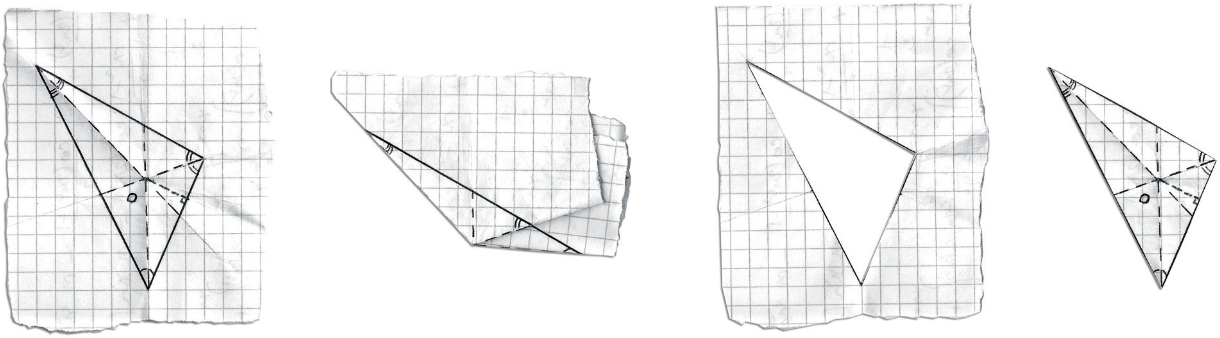

Figure 5. Pliages pour un triangle quelconque permettant de le découper en un seul coup de ciseaux. © I. Dubois.

deux parties du segment, telles que BF et FC, se superposent bien. Par ailleurs, la bissectrice, CO par exemple, est un axe de symétrie pour le couple de perpendiculaires qui l'encadrent, OF et OG (ce qui se démontre par égalité d'angles : les triangles COG et COF, par exemple, sont identiques). Les pliages suivant ces différents segments (bissectrices et perpendiculaires) sont donc compatibles entre eux. En pliant selon les trois bissectrices puis selon l'une des perpendiculaires (fig. 5), on relève le défi posé par le triangle quelconque.

AU TOUR DU POLYGONE

Notre problème se corse si nous nous intéressons au découpage en un seul coup de ciseaux d'un polygone quelconque. Choisissons-le tout de même convexe, c'est-à-dire sans angle rentrant : si l'on prolonge n'importe quel côté du polygone, ce dernier se situe entièrement du même côté de la droite obtenue (fig. 6). Parmi les polygones convexes usuels, on trouve les triangles, les rectangles, les parallélogrammes, les pentagones réguliers… Si le polygone considéré possède des axes de symétrie, nous pouvons bien sûr les utiliser, comme pour les triangles particuliers. Et de même, les bissectrices et les perpendiculaires vont jouer un rôle central pour obtenir les pliages souhaités. Trouverez-vous une solution pour le pentagone de gauche de la figure 6 par exemple ? Pour accroître encore la difficulté, on peut étudier le cas des polygones non convexes, voire de plusieurs polygones qui ne se touchent pas, tels que le nez, la bouche et les yeux de notre citrouille (fig. 7).

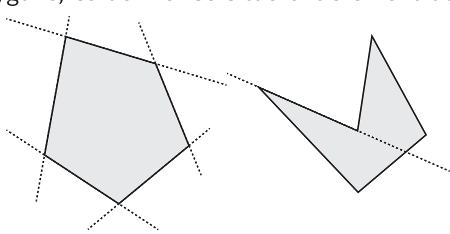

Figure 6. Seul le polygone de gauche est convexe.

Figure 7. Canevas de plis à réaliser pour obtenir la citrouille d'Halloween en un seul coup de ciseaux. © E. Demaine.

DES QUESTIONS EN SUSPENS

Erik Demaine, mathématicien au MIT (Massachusetts Institute of Technology), spécialiste entre autres de l'origami, a démontré récemment, en collaboration avec divers mathématiciens, des théorèmes très généraux énonçant que le défi est réalisable systématiquement, quel que soit l'ensemble de polygones de départ. Du moins en théorie, car en pratique, les pliages ne sont pas toujours aisés et, bien entendu, ils peuvent devenir impossibles à exécuter physiquement à cause d'une superposition trop importante et de l'épaisseur du papier en résultant.
Plusieurs questions restent ouvertes par ailleurs. Erik Demaine a étudié ainsi en 2010 un problème légèrement différent : quels sont les polygones que l'on peut découper en un seul coup de ciseaux, mais en n'effectuant successivement que des plis dits « simples », c'est-à-dire en pliant entièrement la feuille selon ce pli ? De même, il faut généraliser cette problématique au cas des pliages en trois dimensions : peut-on plier un polyèdre quelconque de telle sorte que toutes ses faces se retrouvent dans un même plan ? **I. D.**

Pour en savoir plus

Site d'Erik Demaine sur le « Fold and cut problem », sur lequel on trouve plusieurs exemples de formes à découper « en un seul coup de ciseaux », dont la citrouille (en anglais) :
> http://erikdemaine.org/foldcut/

Deux théorèmes d'origami

Quand on défait un pliage, on observe deux sortes de plis (fig. I). Les plis « vallée » sont ceux effectués en creux ; on les figure généralement par un trait en pointillé. À l'inverse, les plis « montagne » sont en relief – en crête – et se représentent par un trait mixte (alternance de tirets et de points). Le canevas de plis, soit le plan du pliage, doit comporter l'indication du type de plis pour définir parfaitement ce dernier. Mais aucune information n'est donnée sur la façon d'exécuter pratiquement ce pliage (par exemple l'ordre dans lequel se succèdent les plis)… Tous les canevas de plis ne correspondent pas d'ailleurs à un pliage faisable. Des théorèmes nous donnent des conditions toujours vérifiées lorsque l'on réalise un pliage à plat ; en voici deux.

THÉORÈME DE MAEKAWA

En tout sommet intérieur d'un canevas de plis d'un origami pliable à plat, le nombre de plis vallée vaut le nombre de plis montagne ± 2 (fig. II).

Dans le canevas de plis de la figure I, la différence entre le nombre de plis vallée (pointillé) et montagne (mixte) autour d'un même point est bien toujours égale à 2 ou –2.

THÉORÈME DE KAWASAKI

En tout sommet intérieur d'un canevas de plis d'un origami pliable à plat, le nombre total de plis (vallée et montagne) est pair et la somme d'un angle sur deux vaut toujours 180° (autrement dit, si l'on effectue la somme du premier angle moins le deuxième plus le troisième…, on trouvera toujours 0). On peut avoir une idée de la démonstration de ce théorème en regardant un sommet plié. On part d'un côté d'un angle puis on « tourne » autour du sommet. Observez la figure III : un angle sur deux va vers la droite, et un sur deux vers la gauche (il est donc à compter négativement). Or, comme on revient à notre point de départ, la somme des angles est nulle…

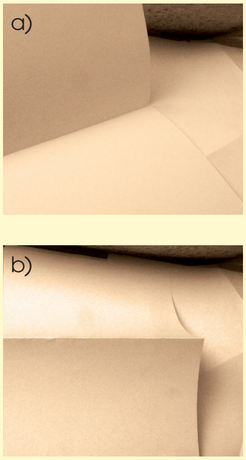

Figure I. Un pli « vallée » (a) et un pli « montagne » (b).
© R. Jamet.

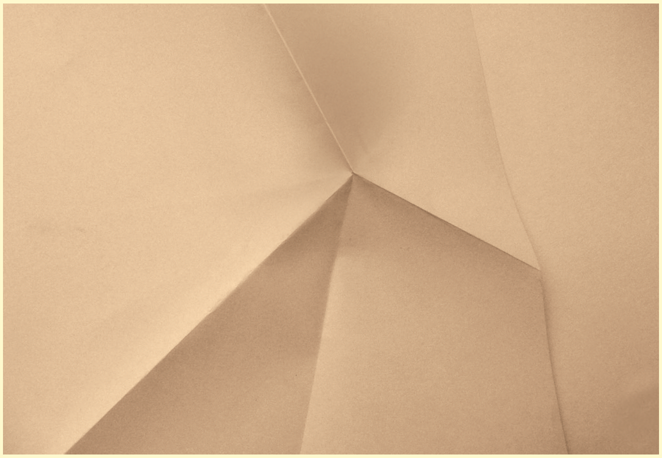

Figure II. Illustration du théorème de Maekawa. © R. Jamet.

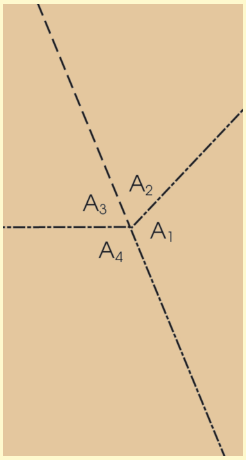

Figure III. Illustration du théorème de Kawasaki : $A_1 - A_2 + A_3 - A_4 = 0$.
© EPPDCSI.