Erratum à “Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, II. Masures ordonnées”

Auguste Hébert vient de démontrer que tout filtre dans l'appartement $\mathbb{A}$ a un bon fixateur [**Héb25**]. Donc le paragraphe 4.12.3 (c) (de [**Rou16**]) en particulier sa dernière phrase, est faux. Les lignes ci-dessous devraient remplacer ce paragraphe (c). J'y explique l'erreur faite en rectifiant quelques résultats et ajoutant quelques précisions.

(b2) Pour mieux comprendre l'action du groupe G sur l'appartement $\mathbb{A}$, il faut considérer le SGR libre et colibre $\mathscr{S}^{mat} = (A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}; Y^{mat} = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}d \oplus \mathbb{Z}c; \alpha_0, \alpha_1; \alpha_1^\vee = h, \alpha_0^\vee = -h + c)$ défini par $\alpha_1(h) = 2, \alpha_1(d) = \alpha_1(c) = 0, \alpha_0 = \delta - \alpha_1, \delta(h) = \delta(c) = 0, \delta(d) = 1$; c'est le “Kac-Moody root datum” $\mathcal{D}^A_{Kac}$ de [**Mar18**, 7.10 et 7.14 (3)]. On considère aussi le SGR libre $\mathscr{S}^\ell = (A; Y^\ell = \mathbb{Z}h \oplus \mathbb{Z}d; \alpha_0, \alpha_1; \alpha_0^\vee = -\alpha_1^\vee = -h)$ défini par les mêmes relations (avec $c = 0$). Alors, d'après [**Mar18**, §7.6 p. 166, 167], $\mathfrak{G}_{\mathscr{S}^\ell}$ est le quotient de $\mathfrak{G}_{\mathscr{S}^{mat}}$ par son centre et s'identifie au produit semi direct $\mathfrak{G}_{\mathscr{S}} \rtimes \mathfrak{Mult}$; de plus l'action associée de $K^* = \mathfrak{Mult}(K)$ sur $G = \mathfrak{G}_{\mathscr{S}}(K) = SL_2(K[t, t^{-1}])$ est donnée par : $R. \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} .R^{-1} = \begin{pmatrix} a(Rt) & b(Rt) \\ c(Rt) & d(Rt) \end{pmatrix}$ pour $R \in K^*$ (voir aussi [**BarHR25**, §6.1 eq. (6.1)]). Comme $\mathfrak{Mult}$ est dans le tore canonique $\mathfrak{T}_{\mathscr{S}^\ell}$ de $\mathfrak{G}_{\mathscr{S}^\ell}$, il agit sur l'appartement $\mathbb{A} = Y^\ell \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}h \oplus \mathbb{R}d$: l'action de $R \in K^*$ avec $\omega(R) = r \in \mathbb{R}$ est donnée par $\nu_r(xh + yd) = xh + (y - r)d$. Par ailleurs la matrice $\tau_S = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \in G$ avec $S \in K^*$ et $\omega(S) = p \in \mathbb{R}$ agit sur $\mathbb{A}$ par la translation $\tau_{2p}(xh + yd) = (x - 2p)h + yd$.

Comme $0 \in \mathbb{A}$ est un point spécial, son fixateur G_0 est égal à U_0 et donc $G_0 = SL_2(\mathcal{O}[t, t^{-1}])$ (*cf.* fin de 4.12.3 (b)). En conjuguant par τ_S et faisant agir $R \in K^*$ (avec $\omega(S) = q, \omega(R) = r$), on trouve que le fixateur $G_{2q,r}$ de $(2q, r) = 2qh + rd$ est : $\tau_S^{-1} R^{-1} G_0 R \tau_S$ $= \{ \begin{pmatrix} a(R^{-1}t) & S^{-2}b(R^{-1}t) \\ S^2 c(R^{-1}t) & d(R^{-1}t) \end{pmatrix} \in SL_2(K[t, t^{-1}]) \mid a(t), b(t), c(t), d(t) \in \mathcal{O}[t, t^{-1}] \}$ $=$ $\{ \begin{pmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{pmatrix} \in SL_2(K[t, t^{-1}]) \mid a'(Rt), d'(Rt), S^2 b'(Rt), S^{-2} c'(Rt)) \in \mathcal{O}[t, t^{-1}] \}$. Ceci est valable pour $q, r \in \omega(K^*)$. Mais si $q, r \in \mathbb{Q}\omega(K^*)$, il existe une extension ramifiée (K', ω') de (K, ω) d'indice de ramification $e(K'/K) = e$ telle que $eq, er \in 2\omega(K^*)$. Alors il existe $R, S \in K'$ tels que $\omega'(R) = r, \omega'(S) = q/2$, donc, si on note $\mathcal{O}'$ l'anneau des entiers de (K', ω'), on a $G_{q,r} = \{ \begin{pmatrix} a'(t) & b'(t) \\ c'(t) & d'(t) \end{pmatrix} \in SL_2(K[t, t^{-1}]) \mid a'(Rt), d'(Rt), S^2 b'(Rt), S^{-2} c'(Rt)) \in \mathcal{O}'[t, t^{-1}] \}$.

(b3) On a $U_0^{ma+} = \mathfrak{U}^{ma+}(\mathcal{O})$ d'après la définition en 4.5 (2) et la proposition 3.2 ; de même $U_0^{ma-} = \mathfrak{U}^{ma-}(\mathcal{O})$. D'après l'exemple de $\widetilde{SL}_2$ en 2.12 et la proposition 3.2, on a $\mathfrak{U}^{ma+}(\mathcal{O}) = \{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ tc & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + btcx^{-1} & bx^{-1} \\ tcx^{-1} & x^{-1} \end{pmatrix} \mid b, c, x \in \mathcal{O}[[t]], x \equiv 1 \mod t \}$. Donc $U_0^{ma+} = \mathfrak{U}^{ma+}(\mathcal{O}) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}[[t]]) \mid a, d \equiv 1, c \equiv 0 \mod t \}$. De même $U_0^{ma-} = \mathfrak{U}^{ma-}(\mathcal{O}) = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}[[t^{-1}]]) \mid a, d \equiv 1, b \equiv 0 \mod t^{-1} \}$. Les mêmes égalités sont vraies si on remplace $\mathcal{O}$ par K et donc $U_0^{ma\pm}$ par $U^{ma\pm}$.

(c2) On suppose pour simplifier ω discrète d'uniformisante ϖ (avec $\omega(\varpi) = 1$), $p \in \mathbb{N}^*$ et K complet. On note z_p le point $(p, 0) = \tau_{-p}(0)$ de $\mathbb{A}$ (*i.e.* $\delta(z_p) = 0$ et $\alpha_1(z_p) = p$) et $\Omega_p = \{0, z_p\}$. L'enclos $cl(\Omega_p)$ est le segment $[0, z_p]$; par contre l'enclos (renforcé) $cl^\#(\Omega_p)$ (défini en 4.2.5) est la réunion de Ω_p et du filtre des voisinages dans $\mathbb{A}$ de l'intervalle ouvert $]0, z_p[$.

Comme ci-dessus (dernier paragraphe de (b2)), on trouve que $U_{z_{2p}}^{ma+} = \tau_{\varpi^{-p}} U_0^{ma+} \tau_{\varpi^p} = \{ \begin{pmatrix} a & b\varpi^{-2p} \\ c\varpi^{2p} & d \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_0^{ma+} \}$ et donc $U_{\Omega_{2p}}^{ma+} = U_0^{ma+} \cap U_{z_{2p}}^{ma+} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}[[t]]) \mid$ $a, d \equiv 1 \mod t, c \equiv 0 \mod \varpi^{2p} t \}$. De même $U_{\Omega_{2p}}^{ma-} = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}[[t^{-1}]]) \mid a, d \equiv$

$1 \bmod t^{-1}, b \equiv 0 \bmod t^{-1}, c \equiv 0 \bmod \varpi^{2p}\}$. Comme à la fin de (b2) on voit que ces résultats sont aussi valables avec $2p$ remplacé par p.

Ces groupes sont en fait plus grands que ce qui était indiqué dans 4.12.3 (c) (car $p \geq 1$). Ce résultat faux était "justifié" par le fait que $U^{ma+}_{\Omega_p}$ aurait été topologiquement engendré par $u^s(\mathcal{O}[[t]])$ et $u^i(\varpi^p t\mathcal{O}[[t]])$ (déduit abusivement d'une phrase de J. Tits dans [40], fin de 3.10 (d) page 555). En fait on oubliait ainsi la contribution des racines imaginaires à $\mathfrak{U}^{ma\pm}$.

On trouve les formules pour $U^{pm+}_0, U^{pm+}_{\Omega_p}$ (resp., $U^{nm-}_0, U^{nm-}_{\Omega_p}$) en intersectant avec $G = SL_2(K[t,t^{-1}])$. Ce sont les mêmes que pour $U^{ma+}_0, U^{ma+}_{\Omega_p}$ (resp., $U^{ma-}_0, U^{ma}_{\Omega_p}$) en remplaçant $\mathcal{O}[[t]]$ (resp., $\mathcal{O}[[t^{-1}]]$) par $\mathcal{O}[t]$ (resp., $\mathcal{O}[t^{-1}]$). En particulier $U^{pm+}_0 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}[t]) \mid a,d \equiv 1, c \equiv 0 \bmod t\}$, $U^{pm+}_{\Omega_p} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}[t]) \mid a,d \equiv 1 \bmod t, c \equiv 0 \bmod \varpi^p t\}$, $U^{nm-}_{\Omega_p} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}[t^{-1}]) \mid a,d \equiv 1 \bmod t^{-1}, b \equiv 0 \bmod t^{-1}, c \equiv 0 \bmod \varpi^p\}$. On peut remarquer que $U^{pm+}_{\Omega_p}$ contient la matrice g de 4.12.3 (a) si $p = 1$ ou 2. Si $\omega(S) = p$, on a également $G_{\Omega_p} = G_0 \cap G_{z_p} = G_0 \cap \tau_S^{-1} G_0 \tau_S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}[t,t^{-1}]) \mid c \equiv 0 \bmod \varpi^p\}$.

Si $p \geq 1$ une matrice $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U^{pm+}_{\Omega_p}$ satisfait à $c \equiv 0 \bmod \varpi^p t$ et $a,d \equiv 1 \bmod \varpi t$ (comme $ad - bc = 1$ et $c \equiv 0 \bmod \varpi$, on a $ad = 1 \bmod \varpi$ et a,d sont des constantes modulo ϖ). D'après le dernier résultat de (b2) on en déduit que g est dans $G_{q,r}$ pour tous $q,r \in \mathbb{Q}$ satisfaisant $0 < q < p$ et $|r|$ assez petit (si eq est dans $\mathbb{Z}$ il suffit que $1/(e|r|)$ soit plus grand que les degrés de $a,b,c,d \in \mathcal{O}[t]$)). Cela signifie (par convexité) que $U^{pm+}_{\Omega_p}$ fixe l'enclos (renforcé) $cl^\#(\Omega_p)$, *i.e.* $U^{pm+}_{\Omega_p} = U^{pm+}_{cl^\#(\Omega_p)}$. De même $U^{nm-}_{\Omega_p} = U^{nm-}_{cl^\#(\Omega_p)}$. Plus généralement, si on remplace Ω_p par n'importe quel filtre Ω dans $\mathbb{A}$, ceci est un résultat d'Auguste Hébert [**Héb25**].

Remarques (i) Soit A un appartement de $\mathscr{I}$ contenant Ω_p, d'après [**Héb22**, Th. 3.6] il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{A} \to A$ fixant $\mathbb{A} \cap A$ et $\mathbb{A} \cap A$ contient $cl^\#(\Omega_p)$. Mais $cl^\#(\Omega_p)$ contient une chambre locale $C = F^\ell(z', C^v)$ pour $z' \in]0, z_p[$. Comme cette chambre a un bon fixateur (*cf.* 5.7.2) il existe $g \in G_C$ tel que $A = g\mathbb{A}$. Ainsi $\varphi^{-1} \circ g$ est un automorphisme de $\mathbb{A}$ fixant C : c'est l'identité. Donc g fixe Ω_p et $cl^\#(\Omega_p)$. On en déduit que G_{Ω_p} ou $G_{cl^\#(\Omega_p)}$ satisfait à l'axiome (TF) de 5.3.

(ii) Le lecteur pourra essayer de montrer que $G_{\Omega_p} = U^{pm+}_{\Omega_p} U^{nm-}_{\Omega_p} N_{\Omega_p} = U^{nm-}_{\Omega_p} U^{pm+}_{\Omega_p} N_{\Omega_p}$ avec $N_{\Omega_p} = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathcal{O}[t,t^{-1}])\}$ (agissant par transvections linéaires sur $\mathbb{A}$). Autrement dit Ω_p a un bon fixateur. Comme indiqué au début, ceci est un résultat d'Auguste Hébert [**Héb25**] pour Ω_p remplacé par n'importe quel filtre Ω dans $\mathbb{A}$. Mais $N_{\Omega_p} \not\subset G_{cl^\#(\Omega_p)}$, donc $G_{\Omega_p} \neq G_{cl^\#(\Omega_p)}$.

(iii) Il est clair que $U^{ma+}_{\Omega_p} \neq U^{ma+}_{cl^\#(\Omega_p)}$ et $U^{ma-}_{\Omega_p} \neq U^{ma-}_{cl^\#(\Omega_p)}$. Par contre, par définition, $U^{ma+}_{\Omega} = U^{ma+}_{cl(\Omega)}$ et $U^{ma-}_{\Omega} = U^{ma-}_{cl(\Omega)}$ pour n'importe quel filtre Ω dans $\mathbb{A}$.

Références

[BarHR25] Nicole Bardy-Panse, Auguste Hébert & Guy Rousseau, Twin masures associated with Kac-Moody groups over Laurent polynomials, *Annals Repr. Th.* **2** (2025), 281–353.

[Héb22] Auguste Hébert, A new axiomatic for masures II, *Advances in Geom.* **22** (2022), 513–522.

[Héb25] Auguste Hébert, Article/monographie sur les masures, à paraître.

[Mar18] Timothée Marquis, *An introduction to Kac-Moody groups over fields*, EMS Textbooks in Math. (Europ. Math. Soc., Zűrich, 2018).

[Rou16] Guy Rousseau, Groupes de Kac-Moody déployés sur un corps local, 2 Masures ordonnées, *Bull. Soc. Math. France* **144** (2016), 613–692.

Guy Rousseau, 6 Juin 2025