Université de Lorraine
Master 2 IMSD

École des Mines de Nancy
Ingénierie Mathématique, 3A

2024-2025

Modélisation stochastique

Madalina Deaconu

Table des matières

Chapitre 1

Processus de renouvellement

Nous allons introduire dans ce chapitre les notions de processus de renouvellement et de processus de renouvellement avec récompense ainsi que leurs propriétés. Commençons par introduire deux exemples.

Exemple 1. Dans une machine, la durée de vie d'un certain composant est modélisée par une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On remplace ce composant dès qu'il est en panne, et on peut se demander combien de fois on va devoir le remplacer pendant les 10 prochaines années.

Exemple 2. Des clients se présentent à un bureau de poste, à des instants d'arrivée qu'on suppose aléatoires. Peut-on étudier la longueur de la file d'attente ? Combien de guichets doit-on ouvrir pour optimiser le service ?

1.1 Définitions

Pour modéliser l'évolution au cours du temps d'une certaine quantité aléatoire nous introduisons la notion de processus stochastique.

Définition 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Un *processus stochastique* $(Y_t)_{t\geq 0}$ sur cet espace est une famille de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, indexée par le temps $t \in \mathbb{R}_+$.

Pour un $\omega \in \Omega$ donné, $t \mapsto Y_t(\omega)$ représente l'évolution d'une quantité au cours du temps. Autrement dit, $\omega \mapsto (t \mapsto Y_t(\omega))$ est une variable aléatoire, à valeurs dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$.

À titre d'exemple, Y_t peut décrire la température au temps t, ou le prix d'une action au temps t sur les marchés financiers, ou le nombre de clients qui se sont présentés au guichet avant t.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On définit

$$S_0 = 0 \text{ et pour } n \geq 1,\ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Définition 2. On définit le *processus de renouvellement* $(N_t)_{t\geq 0}$ associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\geq 1}$ en posant : $N_0 = 0$ et pour $t > 0$,

$$N_t = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{S_i \leq t\}}.$$

Nous donnons dans la remarques suivante les premières propriétes du processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$.

Remarque 1.

1. *Pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto N_t(\omega)$ est une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{N}$. On dit que $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus croissant.*
2. *Comme X_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0$, et donc il n'y a pas d'arrivées simultanées. En particulier, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des instants de renouvellement est strictement croissante et le processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$ ne fait que des sauts de hauteur 1.*
3. *Comme X_1 est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, soit elle est intégrable et $\mathbb{E}(X_1) \in [0, +\infty[$, soit elle n'est pas intégrable, et alors on pose $\mathbb{E}(X_1) = +\infty$.*

Revenons aux exemples 1 et 2 et explicitons les notions pour ces cas précis.

Pour l'exemple 1, si X_i représente la durée de vie du composant i (celui en fonctionnement après $i-1$ remplacements), alors S_n représente l'instant de la n-ième panne ou l'instant du n-ième renouvellement, et N_t le nombre de composants utilisés durant l'intervalle $[0, t]$.

Dans l'exemple 2, si X_i représente le laps de temps qui s'écoule entre l'arrivée du client $i-1$ et celle du client i, S_n représente l'instant d'arrivée du client n, et N_t le nombre de clients qui se sont présentés durant l'intervalle $[0, t]$.

Remarque 2. *Il est équivalent de connaître le processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$, la suite $(X_i)_{i\geq 1}$ des temps inter-arrivées, ou la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ des instants de renouvellement. En effet,* *1. Si on connaît les temps inter-arrivées $(X_i)_{i\geq 1}$, on définit les instants de renouvellement $(S_n)_{n\geq 1}$, puis le processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$.*

2. Si on connaît les instants de renouvellement $(S_n)_{n\geq 1}$, on peut construire le processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$, et on retrouve les temps inter-arrivées $(X_i)_{i\geq 1}$ en remarquant que

$$X_n = S_n - S_{n-1}.$$

3. Si on connaît le processus de renouvellement $(N_t)_{t\geq 0}$, on retrouve les instants de renouvellement $(S_n)_{n\geq 1}$ en remarquant que

$$S_n = \inf\{t \geq 0 : \; N_t \geq n\}.$$

1.2 Propriétés trajectorielles

Nous démontrons dans cette section un théorème qui décrit le comportement en temps long d'un processus de renouvellement.

Théorème 1. *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\geq 1}$ et aux instants de renouvellement $(S_n)_{n\geq 1}$. Supposons que $\mathbb{E}(X_1) > 0$, alors*

(i) Presque-sûrement, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbb{E}(X_1)$.

(ii) Presque-sûrement, pour tout $t \geq 0$, $N_t < +\infty$.

(iii) Presque-sûrement, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} N_t = +\infty$.

(iv) Presque-sûrement, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)}$.

Démonstration :

(i) On applique simplement une version de la loi forte des grands nombres que nous rappelons ici dans le théorème suivant :

Théorème 2. *Soient $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Alors, avec probabilité* 1,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i = \mathbb{E}(X_1).$$

Ce théorème est vrai même si $\mathbb{E}(X_1) = +\infty$.

(ii) D'après le point *(i)*, comme $\mathbb{E}(X_1) > 0$, il existe une partie $\tilde{\Omega} \subset \Omega$, de probabilité 1 telle que pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(\omega) = +\infty.$$

Soit $\omega \in \tilde{\Omega}$ fixé et $t > 0$ fixé. Il existe $n \geq 1$ tel que $S_n(\omega) \geq t$. Or ceci est équivalent à $N_t(\omega) \leq n$. D'où le résultat annoncé.

(iii) Soit $M \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que $N_{S_M} = M$ (voir Exercices), et comme $t \to N_t$ est croissant, pour tout $t \geq S_M$, $N_t \geq M$. Ce qui nous conduit au résultat.

(iv) Soit $t > 0$ fixé. On a toujours $S_{N_t} \leq t < S_{N_t+1}$, d'où, si $N_t > 0$,

$$\frac{S_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} \frac{N_t+1}{N_t}.$$

Comme N_t tend vers $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$, le point *(i)* assure que

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{S_{N_t+1}}{N_t+1} = \mathbb{E}(X_1),$$

et le point *(iii)* assure que $\lim_{t \to +\infty} \frac{N_t+1}{N_t} = 1$. En mettant ensemble ces résultats nous obtenons la limite souhaitée.

■

1.3 Processus de Renouvellement avec Récompense (PRR)

Soit maintenant une suite de couples de variables aléatoires $(X_i, Z_i)_{i \geq 1}$ indépendants et identiquement distribués, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Définition 3. On appelle *processus de renouvellement avec récompense* le processus

$$R_t = \sum_{i=1}^{N_t} Z_i,$$

où N_t est le processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i \geq 1}$.

Reprenons les exemples 1 et 2. Dans ces cas :

1. Dans l'exemple 2, Z_n peut représenter le temps de service du client numéro n dans la file d'attente, et alors R_t représente le temps total de service avant l'instant t.
2. Dans l'exemple 1, Z_1 peut représenter le coût de remplacement d'un composant, et alors R_t représente le coût d'entretien du système jusqu'au temps t.

Remarque 3. *Attention, on suppose que les $(X_i, Z_i)_{i\geq 1}$ sont indépendants, mais par contre on ne suppose pas que X_1 et Z_1 sont indépendants.*

Remarque 4. *Si $Z_i = 1$, le processus de récompense coïncide avec le processus de renouvellement.*

Nous pouvons décrire le comportement du processus de renouvellement avec récompense en temps grand, par la proposition suivante.

Proposition 1. *Soit $(X_i, Z_i)_{i\geq 1}$ une suite de couples de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.*
On suppose que $\mathbb{E}(X_1) < +\infty$ et que $\mathbb{E}(|Z_1|) < +\infty$. Alors, presque sûrement,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{R_t}{t} = \frac{\mathbb{E}(Z_1)}{\mathbb{E}(X_1)}.$$

Démonstration : Soit $t > 0$ assez grand pour que $N_t > 0$. On écrit simplement $\frac{R_t}{t} = \frac{R_t}{N_t}\frac{N_t}{t}$. On a déjà vu que, presque sûrement,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{N_t}{t} = \frac{1}{\mathbb{E}(X_1)}.$$

Maintenant, $\frac{R_t}{N_t} = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} Z_i$ et comme $N_t \to +\infty$, on peut appliquer encore une fois la loi des grands nombres pour montrer que, p.s.

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{R_t}{N_t} = \mathbb{E}(Z_1),$$

ce qui termine la preuve. ∎

1.4 Théorème Central Limite

Nous introduisons dans cette partie un résultat de type théorème central limite pour le processus de renouvellement.

Théorème 3. *Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On suppose que $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$ et on note $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$. On note $(N_t)_{t\geq 0}$ le processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\geq 1}$. Alors on a la convergence en loi suivante :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\mu^{3/2}\sqrt{t}}{\sigma}\left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{\mu}\right) = G,$$

où G note une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite (notée aussi $\mathcal{N}(0,1)$).

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$. On va montrer que les fonctions de répartition sont les mêmes. On remarque d'abord que :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\frac{\mu^{3/2}\sqrt{t}}{\sigma}\left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{\mu}\right) < x\right) &= \mathbb{P}\left(N_t < \frac{t}{\mu} + \frac{x\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(S_{k_t} > t\right), \end{aligned}$$

où $k_t = \left[\frac{t}{\mu} + \frac{x\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}}\right]$. En utilisant le théorème central limite pour la suite $(X_i)_{i\geq 1}$, on a la convergence en loi suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right) = G, \text{ où } G \sim \mathcal{N}(0,1),$$

ici $\sim$ notant le fait que les deux variables aléatoires ont la même loi. Comme k_t tend vers $+\infty$ quand t tend vers $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(S_{k_t} > t\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{k_t}}{\sigma}\left(\frac{S_{k_t}}{k_t} - \mu\right) > \frac{\sqrt{k_t}}{\sigma}\left(\frac{t}{k_t} - \mu\right)\right) \\ &\approx 1 - \Phi(\alpha_t) = \Phi(-\alpha_t), \end{aligned}$$

où

$$\alpha_t = \frac{\sqrt{k_t}}{\sigma}\left(\frac{t}{k_t} - \mu\right) \tag{1.1}$$

et ϕ est la fonction de répartition de G, variable aléatoire gaussienne, centrée et réduite :

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y.$$

La notation $\approx$ signifie que les deux quantités sont du même ordre lorsque t est grand.

Il suffit donc de voir que lorsque t tend vers $+\infty$, α_t tend vers $-x$. Pour t assez grand on déduit que

$$k_t = \frac{t}{\mu} + \frac{x\sigma\sqrt{t}}{\mu^{3/2}} + o(\sqrt{t}).$$

En divisant par t cela conduit à :

$$\frac{k_t}{t} = \frac{1}{\mu} + \frac{x\sigma}{\mu^{3/2}\sqrt{t}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

et en passant à l'inverse :

$$\begin{aligned}
\frac{t}{k_t} &= \mu\left(\frac{1}{1+\frac{x\sigma}{\sqrt{t\mu}}+o(\frac{1}{\sqrt{t}})}\right) \\
&= \mu\left(1-\frac{x\sigma}{\sqrt{t\mu}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Donc, nous obtenons d'une part

$$\frac{t}{k_t} - \mu \approx -x\sigma\sqrt{\frac{\mu}{t}}$$

et d'autre part

$$\frac{\sqrt{k_t}}{\sigma} \approx \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{t}{\mu}}.$$

En reprenant la définition de α_t donnée dans (1.1), on trouve le résultat souhaité $\lim\limits_{t\to+\infty} \alpha_t = -x$. En conclusion, cela conduit à la convergence en loi :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\mu^{3/2}\sqrt{t}}{\sigma}\left(\frac{N_t}{t} - \frac{1}{\mu}\right) < x\right) \quad = \phi(x)$$

où $\phi(x)$ est la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée et réduite.

■

1.5 Fonction de renouvellement

La variable N_t, qui représente le nombre de renouvellements dans l'intervalle de temps $[0, t]$, est une variable aléatoire dont l'espérance mathématique est une indicateur important. Cette espérance est appelée fonction de renouvellement et est notée :

$$M(t) = \mathbb{E}(N_t).$$

Définition 4. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\geq 1}$. On appelle *fonction de renouvellement* et on la note $M(t)$, l'espérance mathématique de la variable aléatoire N_t. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$t \mapsto M(t) = \mathbb{E}(N_t).$$

Dans la proposition suivante nous donnons une représentation de $M(t)$ en fonction de $(S_n)_{n\geq 1}$.

Proposition 2. *Soit F_n la fonction de répartition de S_n, date du $n^{\text{ième}}$ événement (instant de renouvellement). Alors, pour tout $t \geq 0$ on a*

$$M(t) = \sum_{n\geq 1} F_n(t) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t). \tag{1.2}$$

Démonstration : Par la définition de la fonction de renouvellement on a :

$$M(t) = \mathbb{E}(N_t) = \sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}(N_t = n).$$

Calculons la loi de N_t en utilisant les F_n. Nous avons

$$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n+1).$$

Nous remarquons que l'événement $\{N_t \geq n\}$ est équivalent avec l'événement

{ à la date t, il y a eu au moins n renouvellements }

qui est lui même équivalent à l'événement

{ la date du $n^{\text{ième}}$ renouvellement est inférieure à t }.

Ou encore, en utilisant les exercices, on déduit :

$$\mathbb{P}(N_t \geq n) = \mathbb{P}(S_n \leq t) = F_n(t), \tag{1.3}$$

d'où $\mathbb{P}(N_t = n) = F_n(t) - F_{n+1}(t)$. Ce qui nous conduit à :

$$M(t) = \sum_{n\geq 1} n(F_n(t) - F_{n+1}(t)) = \sum_{n\geq 1} F_n(t). \tag{1.4}$$

■

Nous pouvons aussi obtenir ce résultat avec la remarque suivante :

Remarque 5. *En utilisant le résultat général pour une variable aléatoire discrète, si $Y : \Omega \mapsto \mathbb{N}$ est une variable aléatoire alors son espérance s'écrit :*

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Y \geq n).$$

En appliquant ce résultat à N_t, nous obtenons :

$$\mathbb{E}(N_t) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(N_t \geq n) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n \leq t) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(t).$$

1.6 Âge courant et âge résiduel

Nous abordons ici quelques notions définissant diverses notions concernant le temps. Soit $t \geq 0$ fixé.

Définition 5. *L'âge courant* à l'instant t est le temps qui s'écoule depuis le dernier renouvellement, il est égal à :

$$t - S_{N_t}.$$

L'âge résiduel à l'instant t est le temps qui reste avant le prochain renouvellement, il est égal à :

$$S_{N_t+1} - t.$$

La *vie totale* à l'instant t est le temps qui s'écoule entre le $N_t^{\text{ième}}$ et le $(N_t+1)^{\text{ième}}$ renouvellements. C'est aussi la somme entre l'âge courant et l'âge résiduel, elle est égale à :

$$X_{N_t+1} = S_{N_t+1} - S_{N_t}.$$

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3. *Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_i)_{i\geq n}$, et notons $\mathbb{E}(X_1) = \mu$. Alors :*

$$\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu(M(t)+1). \tag{1.5}$$

Démonstration : Calculons, en utilisant les définitions

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{N_t+1}) &= \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_{N_t+1}) \\ &= \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^{N_t} X_i\right] \\ &= \mu + \mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^{+\infty} X_i \mathbb{1}_{\{i\leq N_t+1\}}\right] \\ &= \mu + \sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{i\leq N_t+1\}}\right]. \end{aligned} \tag{1.6}$$

En utilisant l'équivalence des événements $\{N_t \geq i-1\}$ et $\{X_1+\ldots+X_{i-1} \leq t\}$ on peut écrire

$$\mathbb{1}_{\{N_t\geq i-1\}} = \mathbb{1}_{\{S_{i-1}\leq t\}} = \mathbb{1}_{\{X_1+\ldots+X_{i-1}\leq t\}} \tag{1.7}$$

et, en revenant avec ce résultat dans les termes présents dans le calcul (1.6) on obtient, en utilisant l'indépendance et l'égalité en loi des $(X_i)_{i\geq n}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{i\leq N_t+1\}}\right] &= \mathbb{E}\left[X_i \mathbb{1}_{\{X_1+\ldots+X_{i-1}\leq t\}}\right] \\ &= \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_1+\ldots+X_{i-1}\leq t\}}\right] \\ &= \mu\, \mathbb{P}(S_{i-1}\leq t) \\ &= \mu\, F_{i-1}(t). \end{aligned} \tag{1.8}$$

En utilisant la Proposition 2 et ce résultat, (1.6) devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_{N_t+1}) &= \mu + \sum_{i=2}^{+\infty} \mu F_{i-1}(t) \\ &= \mu\left(1+\sum_{i=2}^{+\infty} F_{i-1}(t)\right) \\ &= \mu\left(1+\sum_{i=1}^{+\infty} F_{i}(t)\right) \\ &= \mu\,(1+M(t)). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Ce qui finit la preuve. ■

Nous présentons dans la proposition suivante une équation satisfaite par la fonction de renouvellement.

Proposition 4. *Pour tout $t \geq 0$ nous avons $M(t) < \infty$ et :*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu}. \tag{1.10}$$

En outre, si les temps inter-arrivées $(X_i)_{i\geq 1}$ sont des variables aléatoires à densité et si on note f leur densité, alors la fonction M est continue et vérifie l'équation de renouvellement :

$$M(t) = \int_0^t (1+M(t-s))f(s)ds, \forall t \geq 0. \tag{1.11}$$

Démonstration : On remarque que :

$$\mathbb{P}(S_i \leq t) = \mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{S_i\leq t\}}\right) \leq \mathbb{E}[e^{t-S_i}] = e^t\left[\mathbb{E}(e^{-X_1})\right]^i. \tag{1.12}$$

Comme X_1 est une v.a. strictement positive on a $\mathbb{E}(e^{-X_1}) < 1$ ce qui conduit à

$$M(t) \leq e^t \sum_{i=1}^{+\infty}\left[\mathbb{E}(e^{-X_1})\right]^i < \infty.$$

Considérons maintenant la situation $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a. à densité f. Pour $i \geq 2$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_i \leq t) &= \mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_i \leq t) \\
&= \int \ldots \int_{t_1+\ldots+t_i \leq t} f(t_1)\ldots f(t_i)\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_i \\
&= \int_0^t f(t_i) \left(\int \ldots \int_{t_1+\ldots+t_{i-1} \leq t-t_i} f(t_1)\ldots f(t_{i-1})\mathrm{d}t_1 \ldots \mathrm{d}t_{i-1} \right) \mathrm{d}t_i \\
&= \int_0^t f(s)\mathbb{P}(S_{i-1} \leq t-s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Ce qui nous permet de réecrire les expressions sous la forme :

$$\begin{aligned}
M(t) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(S_i \leq t) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leq t) + \sum_{i\geq 2} \int_0^t f(s)\mathbb{P}(S_{i-1} \leq t-s)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t f(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s) \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(S_i \leq t-s)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait avec la Proposition 2 que $M(t) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(S_i \leq t)$.

Ceci nous conduit au résultat recherché :

$$M(t) = \int_0^t (1 + M(t-s))f(s)\mathrm{d}s, \forall t \geq 0,$$

donc $M(t)$ vérifie l'équation de renouvellement (1.11). ∎

1.7 Processus de Poisson

Le processus de Poisson est un cas particulier de processus de renouvellement et il est aussi un processus ponctuel.

Nous étudions dans cette section des processus de Poisson simples, de paramètre constant.

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ (notée $\mathcal{E}(\lambda)$). Pour tout $t \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et le processus $(N_t)_{t\geq 0}$

par

$$\begin{aligned} N_0 &= 0 \\ N_t &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}} = \sup\{n \geq 1, \sum_{i=1}^{\infty} X_i \leq t\}, \forall t > 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Définition 6. Le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est un *processus de Poisson* de paramètre λ.

Remarque 6. *Soit P_0 une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante de la suite de v.a. $(X_i)_{i\geq 1}$. Le processus de Poisson issu de P_0 est le processus défini par :*

$$P_t = P_0 + N_t, \quad \forall t \geq 0.$$

Remarque 7. *Le paramètre λ est appelé **intensité du processus**. En particulier $\mathbb{E}(N_t) = \lambda t$.*

Nous présentons dans la proposition suivante quelques propriétés du processus de Poisson.

Proposition 5. *Soit $\lambda > 0$ et $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ (d'intensité λ). Alors :*

(i) Le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est croissant avec des sauts de 1.

(ii) La loi de la v.a. N_t est la loi de Poisson de paramètre λt, pour tout $t \geq 0$.

(iii) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_m$, les variables aléatoires $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_m} - N_{t_{m-1}}$ sont indépendantes.
De plus, pour tous $0 \leq s < t$, $N_t - N_s$ a même loi que N_{t-s}.
*On dit alors que le processus N_t est un **processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS)**.*

Remarque 8. *Les propritétés (i) et (iii) restent vraies pour le processus $(P_t)_{t\geq 0}$, car elles ne font intervenir que les accroissements.*

Démonstration : Montrons d'abord le (i). En utilisant la définition on a

$$N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}}$$

et on déduit que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est croissant.

Pour montrer que les sauts de $(N_t)_{t\geq 0}$ sont égaux à 1 il suffit de vérifier que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $X_i \neq 0$ p.s. Ceci est vrai car les variables aléatoires X_i sont des variables aléatoires de loi exponentielle.

Montrons à présent (ii). Pour $n \geq 1$, nous utiliserons l'égalité suivante :

$$\{N_t \geq n\} = \{S_n \leq t\}.$$

Soit $n \geq 1$ fixé. On peut montrer que la loi de la variable aléatoire

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

est une loi $\Gamma(\lambda, n)$ de densité :

$$\frac{1}{(n-1)!}\lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} \mathbb{1}_{\{s>0\}}.$$

On déduit ainsi que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(N_t \geq n) - \mathbb{P}(N_t \geq n+1) \\
&= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\right) - \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n+1} X_i \leq t\right) \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} \mathrm{d}s - \frac{1}{n!}\int_0^t \lambda^{n+1} s^n e^{-\lambda s} \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} \mathrm{d}s + \frac{1}{n!}\lambda^n t^n e^{-\lambda t} - \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t \lambda^n s^{n-1} e^{-\lambda s} \mathrm{d}s \\
&= \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t},
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé successivement les propriétés des variables aléatoires X_i et une intégration par parties.

Pour $n = 0$ on a $\mathbb{P}(N = 0) = \mathbb{P}(X_1 > t) = e^{-\lambda t}$.

On déduit ainsi que N_t suit une loi de Poisson de parmètre λt (qu'on notera aussi $\mathcal{P}(\lambda t)$).

En particulier $\mathbb{E}(N_t) = \lambda t$. Ce qui montre (ii).

Montrons le (iii). En utilisant que $N_{t_0} = N_0 = 0$ on a, pour $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(N_{t_1} - N_0 = n_1, N_{t_2} - N_{t_1} = n_2, \ldots, N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = n_m) \\
&\quad = \mathbb{P}\left(N_{t_1} = n_1, N_{t_2} = n_1 + n_2, \ldots, N_{t_m} = \sum_{i=1}^{m} n_i\right) \\
&\quad = \prod_{k=2}^{m} \mathbb{P}\left(N_{t_k} = \sum_{i=1}^{k} n_i \,/\, N_{t_1} = n_1, \ldots, N_{t_{k-1}} = \sum_{i=1}^{k-1} n_i\right) \mathbb{P}(N_{t_1} = n_1) \\
&\quad = \mathbb{P}(N_{t_1} = n_1) \prod_{k=2}^{m} \mathbb{P}\left(N_{t_k} - N_{t_{k-1}} = n_k\right) \\
&\quad = \mathbb{P}(N_{t_1} = n_1) \prod_{k=2}^{m} \mathbb{P}\left(N_{t_k - t_{k-1}} = n_k\right),
\end{aligned}$$

en utilisant la probabilité conditionnelle et la propriété de Markov.

Comme cette égalité est vraie pour toutes les valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_m$ on démontre ainsii (iii). ■

1.7.1 Simulation d'un processus de Poisson

Nous présentons d'abord la méthode standard.

Méthode standard (Cumul de lois exponentielles).
Nous utilisons le résultat suivant :

Proposition 6. *Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La variable aléatoire définie par*

$$Y = \begin{cases} 0 & \text{si } X_1 \geq 1, \\ \max\left\{n \geq 1, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 1\right\} & \text{sinon} \end{cases}$$

suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{k} X_j \leq 1 < \sum_{j=1}^{k+1} X_j\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{k+1}} \lambda^{k+1} \exp(-\lambda(x_1+\cdots+x_{k+1}))\mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}} \\
&\qquad \times \mathbb{1}_{\{x_{k+1}>1-(x_1+\cdots+x_k)\}} \mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{k+1} \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{k}} \lambda^{k} \exp(-\lambda(x_1+\cdots+x_{k}))\mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}} \\
&\qquad \times \left(\int_{1-(x_1+\cdots+x_k)}^{+\infty} \lambda\exp(-\lambda x_{k+1})\mathrm{d}x_{k+1}\right)\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^{k}} \lambda^{k} \exp(-\lambda(x_1+\cdots+x_{k}))\mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}}\exp(-\lambda) \\
&\qquad \times \exp(\lambda(x_1+\cdots+x_k))\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k \\
&= \lambda^k\exp(-\lambda)\textstyle\int_{\mathbb{R}_+^k}\mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k.
\end{aligned}$$

Pour calculer la dernière intégrale, on effectue le changement de variable $s_1 = x_1$, $s_2 = x_1 + x_2$, $\ldots$, $s_k = x_1 + \cdots + x_k$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^k}\mathbb{1}_{\{x_1+\cdots+x_k\leq 1\}}\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_k &= \int_{\mathbb{R}_+^k}\mathbb{1}_{\{s_1\leq s_2\leq\cdots\leq s_k\leq 1\}}\mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_k \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}s_k\int_0^{s_k}\mathrm{d}s_{k-1}\cdots\int_0^{s_2}\mathrm{d}s_1 = \frac{1}{k!},
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Remarque 9. *Il faut donc simuler des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ, faire la somme succéssive et compter le nombre de simulations nécessaires pour dépasser 1, ou bien simuler des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1, et compter le nombre de simulations nécessaire pour dépasser λ.*

Remarque 10. *Soit $(U_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$ (qu'on note par $\mathcal{U}[0,1]$) et définissons la v.a. $X_i = -\frac{1}{\lambda}\ln U_i$. Alors $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ.*

On note que :

$$\sum_{i=1}^n X_i \leq 1 \iff -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\prod_{j=i}^n U_i\right)\leq 1 \iff \prod_{i=1}^n U_i \geq e^{-\lambda}.$$

Nous remarquons aussi une expression alternative :

$$\min \left\{ n \geq 1, \prod_{i=1}^{n+1} U_i < e^{-\lambda} \right\} = \max \left\{ n \geq 1, \prod_{i=1}^{n} U_i \geq e^{-\lambda} \right\}.$$

Pour simuler une trajectoire du processus $(N_t)_{t \geq 0}$ sur $[0, T]$ avec $T > 0$ fixé :

— On se donne $\lambda > 0$ et $T > 0$.

— On simule les v.a. $(X_i)_{i \geq 1}$ et les instants $(S_n)_{n \geq 1}$ jusqu'à ce que $S_n \leq T < S_{n+1}$, puis on compte le nombre de sauts.

Cette méthode est très facile à implémenter mais peut s'avérer très couteuses si

— le processus a beaucoup de sauts (pour λ grand)

— si le temps final T est grand.

Nous allons donc proposer une méthode de simulation qui permet d'éviter ces problèmes.

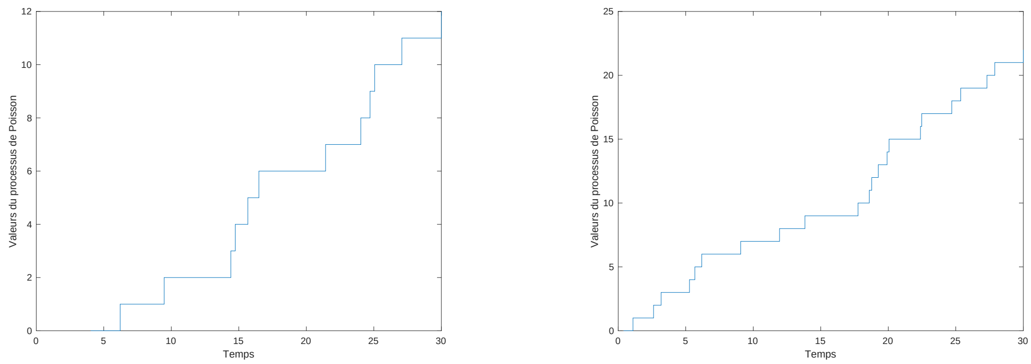

Figure 1.1 – Trajectoires du processus N_t pour $\lambda = 0.2, T = 30$ à gauche et $\lambda = 1, T = 30$ à droite

Méthode de simulation du processus de Poisson

- On se donne $\lambda > 0$ et $T > 0$.
- On commence par simuler le nombre de sauts sur $[0, T]$ (en simulant une loi de Poisson de paramètre λt). Supposons que ce nombre de sauts est n.
- Puis, conditionnellement à ce nombre de sauts sur $[0, T]$ on va simuler les instants de sauts : on simule pour cela $U_1, \dots, U_n$ des v.a.i.i.d. de loi $\mathcal{U}[0, T]$ qu'on réordonne dans l'ordre croissant.

Cet algorithme est basé sur le résultat suivant :

Proposition 7. *La loi conditionnelle de $(S_1, \dots, S_n)$ sachant $\{N_t = n\}$ est la loi de n variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, T]$, réordonnées dans l'odre croissant, i.e. la loi de densité sur $\mathbb{R}_+^n$*

$$f(t_1, \dots, t_n) = n!\, T^{-n} \mathbb{1}_{\{0 \leq t_1 < t_2 \dots < t_n = T\}}.$$

1.7.2 Comportement asymptotique

Nous analysons dans cette partie le comportement asymptotique du processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$.

Théorème 4. *Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On a alors :*

(i) Presque sûrement

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda.$$

(ii) Nous avons la convergence en loi

$$\lim_{t \to +\infty} \sqrt{\frac{\lambda}{t}} \left(\frac{N_t}{t} - \lambda \right) = G,$$

où G désigne une variable aléatoire de loi gaussienne centrée et réduite.

Démonstration : Ce résultat est une application directe des résultats sur les processus de renouvellement. Ici X_1 est de loi exponentielle de paramètre λ donc

$$\mathbb{E}(X_1) = \mu = \frac{1}{\lambda} \text{ et } \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

■

1.8 Exercices

Exercice 1. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé à $(X_i)_{i\geq 1}$, et $S_n = X_1 + ... + X_n$. Montrer que $N_{S_n} = n$, et que $S_{N_t} \leq t$.

Exercice 2. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé à $(X_i)_{i\geq 1}$, et $S_n = X_1 + ... + X_n$.
1) A-t-on

(*i*) $N_t = n$ ssi $S_n \leq t < S_{n+1}$?

(*ii*) $N_t < n$ ssi $S_n > t$?

(*iii*) $N_t \leq n$ ssi $S_n \geq t$?

(*iv*) $N_t > n$ ssi $S_n < t$?

2) Le temps vaut t. Exprimer le délai écoulé depuis la dernière arrivée. Exprimer le temps d'attente entre la dernière arrivée et la prochaine arrivée.

Exercice 3. Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un processus de renouvellement associé à $(X_n)_{n\geq 1}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_{N_t+1}) \leq \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N_t + 1).$$

Pourquoi n'est-il pas clair que $\mathbb{E}(X_{N_t+1}) = \mathbb{E}(X_1)$?

Exercice 4. Donner un exemple de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance infinie, et une v.a. à densité à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ d'espérance infinie.

Exercice 5. Dans un avion, un composant est remplacé à coût c_2 à chaque fois qu'il arrive à l'âge T, sauf s'il tombe en panne avant, auquel cas il est remplacé à coût $c_1 > c_2$. Les durées des vies des composants successifs sont des v.a.i.i.d. $(Y_n)_{n\geq 1}$, de densité f et de fonction de répartition F.

1. A l'aide d'un processus de renouvellement avec récompense associé à une suite de vecteurs i.i.d. (X_n, Z_n), exprimer le coût moyen $C_t(T)$ par unité de temps sur la période d'utilisation $[0, t]$.
2. Donner une valeur approchée de $C_t(T)$ lorsque t est grand.
3. Dans le cas où $Y_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$, comment choisir T pour un coût minimal ? Commenter le résultat. [$T = +\infty$]
4. Dans le cas où $Y_1 \sim \mathcal{U}([0, 1])$, comment choisir T pour un coût minimal ? [exprimer T en fonction de c_1 et c_2]

5. Supposons T, c_1, c_2 donnés, et $f(x) = 2x1_{[0,1]}(x)$. Simuler $C_{100}(T)$. Comment faire un calcul approché de $E[C_{100}(T)]$?

Exercice 6. La production d'une centrale électrique (en Mwh) sur l'intervalle $[0, t]$ est donnée par

$$P_t = \int_0^t \phi(Y_s)ds$$

où Y_s est l'âge d'un composant primordial, et où ϕ est une fonction décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Les durées de vie des composants successifs sont données par des v.a. positives $(X_n)_n$ i.i.d. de densité f.
Le remplacement d'un composant coûte c \$, et chaque Mwh produit rapporte p \$.
Afin d'optimiser le profit, on décide de remplacer le composant à chaque fois qu'il dépasse l'âge A.

1. Soit Z_n la durée d'utilisation du composant numéro n. Exprimer P_n, la production de Mwh lors de l'utilisation du composant numéro n.
2. Exprimer le profit moyen par unité de temps $\pi_t(A)$ réalisé sur la période $[0, t]$.
3. Donner une valeur approchée de $\pi_t(A)$ lorsque t est grand.
4. Dans le cas d'un composant de très mauvaise qualité, on a $\phi(\alpha) = e^{-\alpha}$ et $X_1 \sim \mathcal{E}(1)$. Comment choisir A ?
5. Dans un cas plus favorable on a $\phi(\alpha) = 1$ et $X_1 - 10 \sim \mathcal{E}(1)$. Comment choisir A ?
6. On suppose que $\phi(\alpha) = e^{-\alpha}$ et $X_1 \sim \mathcal{E}(1)$. Simuler $\pi_{1000}(10)$.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Notons par $(N_t)_{t\geq 0}$ le processus de renouvellement associé aux temps inter-arrivées $(X_n)_{n\geq 1}$. Pour tout $t \geq 0$ on note $M(t) := \mathbb{E}(N_t)$ la fonction de renouvellement.

1. Considérons le cas où les variables X_n suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$. En utilisant l'équation de renouvellement trouver une forme explicite de $M(t)$ pour $t \leq 1$.
2. Supposons maintenant que les variables X_n suivent la loi gamma de paramètres $(1, 2)$, de densité $t\exp(-t)$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) En remarquant que la loi gamma de paramètre $(1, 2)$ est aussi la loi de la somme de deux variables exponentielles indépendantes de paramètre 1, vérifier que

   $$\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(R_t = 2n) + \mathbb{P}(R_t = 2n + 1),$$

   où R_t note un processus de Poisson de paramètre 1.

(b) Déduire que

$$M(t) = \frac{\mathbb{E}(R_t)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R_t = 2n+1).$$

(c) Montrer que M est de la forme $M(t) = \frac{t}{2} + \frac{e^{-2t}-1}{4}$. Vérifier ensuite que M est bien solution de l'équation de renouvellement.