Introduction à la mécanique des fluides

J. LEQUEURRE (21/03/2024)

Ref : Feireisl, Boyer - Fabrie

3 inconnus : . $\rho : I \times \Omega \ni (t,x) \to \mathbb{R}$ densité

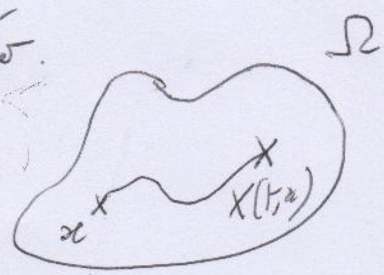
. $u : I \times \Omega \ni (t,x) \to \mathbb{R}^N$ vitesse

. $\Theta : I \times \Omega \ni (t,x) \to \mathbb{R}$ température

où $I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$

$X(t,\cdot) : \Omega \to \Omega$ à $t \in I$ fixé un difféo.

"mouvement du fluide" / flot



$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}(t,x) = u(t, X(t,x)) \\ X(t_0,x) = x \end{cases}$$

une edo qui donne X en fonction de u

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \det(\nabla_x X(t,x)) = \det(\nabla_x X(t,x)) (\mathrm{div}_x\, u)(t, X(t,x)) \\ \det(\nabla_x X(t_0,x)) = 1 \end{cases}$$

Rq : Avec $X(t,x) = \begin{pmatrix} X_1(t,x) \\ \vdots \\ X_N(t,x) \end{pmatrix}$, on a

$$\nabla_x X(t,x) = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_\ell}\right)_{k,\ell}(t,x)$$

$$u : \Omega \to \mathbb{R}^N, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \to \operatorname{div}(u) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} = \operatorname{Tr}(\nabla_x u)$$

Equation de la masse :

$(\Pi_t)_{t \in I}$ mesures définies sur Ω vérifiant

$$\forall B \in \mathcal{B}(\Omega),\ \forall t_1, t_2 \in I,\ \Pi_{t_1}(X(t_1,B)) = \Pi_{t_2}(X(t_2,B))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\Pi_t(X(t,B))\right) = 0$$

Hyp : $\forall t \in I$, Π_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de Ω, on note $\rho(t)$ la densité associée : $\Pi_t(X(t,B)) = \int_{X(t,B)} \rho(t,x)\,dx$

$$\frac{d}{dt}\int_{X(t,B)} \rho(t,x)\,dx = 0.$$ [formule de transport de Reynolds]

Rq : $\int_{X(t,B)} \rho(t,x)\,dx = \int_B \rho(t, X(t,x)) \det(\nabla_x)(t,x)\,dx$

En dérivant par rapport à t, on obtient

$$0 = \int_B \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla_x \rho\right)(t, X(t,x)) \det(\nabla_x X) + \rho \operatorname{div} u \times \det(\nabla_x X)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \text{ sur } I \times \Omega$$

équation de conservation de la masse

(on a utilisé la formule $\operatorname{div}(\rho u) = \rho \operatorname{div}(u) + u \cdot \nabla \rho$)

Rq : $\rho(t, X(t,x)) \det(\nabla_x X)(t,x) = \rho(t_0, x) \quad \forall t \in I, \forall x \in \Omega$

Lois de conservation quantité de mouvement

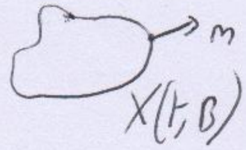
Pour $B \subset \Omega$ régulier : F : force ext.

$$\frac{d}{dt} \int_{X(t,B)} (\rho u)(t,x)\, dx = \int_{X(t,B)} \overbrace{\rho f}^{F} + \int_{\partial X(t,B)} \overbrace{\tau(u,n)}^{\text{ou } \tau(\rho,u,n)}\, ds$$

(dérivée quantité de mouvement (= masse × vitesse) est égale à la somme des forces exercées sur le fluide)

Hyp : $\tau(\rho, u, n) = \underbrace{\Pi(\rho, u)}_{\text{tenseur des contraintes de Cauchy}} \, n$ où $\Pi(\rho,u) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$

n : vect. normal



= Principe de Cauchy

On dérive par rapport à t :

$$\int_{X(t,B)} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)(t,x)\,dx + \int_{\partial X(t,B)} (\rho u)\, u\cdot n\, d\sigma$$

$$= \int_{X(t,B)} \rho f + \int_{\partial X(t,B)} \Pi n\, d\sigma$$

Or $\displaystyle\int_{\partial X(t,B)} (\rho u)\, u\cdot n = \int_{X(t,B)} \operatorname{div}(\rho u \otimes u)\,dx$ (Green)

où $u \otimes u = (u_k u_\ell)_{k,\ell}$

et si $A : \Omega \ni x \to \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, $\operatorname{div}(A) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}(a_{k\ell})\right)_k$

(convention : somme sur les indices répétés)

De même, $\displaystyle\int_{\partial X(t,B)} \Pi n\, d\sigma = \int_{X(t,B)} \operatorname{div}(\Pi)$

On obtient alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \operatorname{div}(\Pi) + \rho f \quad \text{dans } I \times \Omega$$

équation conservation de la quantité de mouvement

Rq : $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)}_{\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}} + \underbrace{\mathrm{div}(\rho u \otimes u)}_{\rho (u \cdot \nabla) u + \mathrm{div}(\rho u) u} = \mathrm{div}(\Pi) + \rho f$

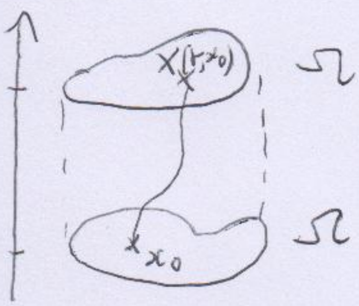
En utilisant conservation de la masse :

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right] = \mathrm{div}(\Pi) + \rho f$$

$$\left(\text{avec } \left[(u \cdot \nabla) u \right]_k = \left(\sum_\ell u_\ell \frac{\partial}{\partial x_\ell} \right) u = \sum_\ell u_\ell \frac{\partial u_k}{\partial x_\ell} \right)$$

(05/04/2024)

<u>Rappels</u> : $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$



$(X(t,\cdot))_{t \in I}$ difféo.

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t,x) = u(t, X(t,x)) & (t,x) \in I \times \Omega \\ X(t_0, x) = x, & x \in \Omega \end{cases}$$

$u : I \times \Omega \to \mathbb{R}^N$ vitesse du fluide

$\rho : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ densité du fluide

$$\leadsto \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho u) = 0 \text{ dans } I \times \Omega \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{conservation de} \\ \text{la masse} \end{array} \right) \quad (1)$$

$$\left(\text{avec } \operatorname{div}(a) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a_k}{\partial x_k} \quad \text{où} \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. = \operatorname{Tr}(\nabla a) \quad \text{où} \quad \nabla a = \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_l} \right)_{k,l} \right)$$

Equation de la quantité de mouvement : $(=\rho u)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \operatorname{div}(\Pi) + \rho f \qquad (2)$$

où $\operatorname{div}(A) = \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} \right)_{j \in [1,N]}$

si $A : I \times \Omega \to \mathbb{R}^{N \times N}$, $A = (a_{jk})_{j,k \in [1,N]}$

Rq : $\operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \operatorname{div}(\rho u \otimes u) + \rho \nabla u\, u$

où $\nabla u\, u =: \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} u_k \right)_j = (u \cdot \nabla) u$

$$(1) + (2) \Rightarrow \rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla u\, u \right] = \operatorname{div}(\Pi) + \rho f \qquad (2')$$

Energie totale

* Energie cinétique : $(2) \cdot u$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 \right) + \operatorname{div}\left(\frac{1}{2} \rho |u|^2 u \right) = \operatorname{div}(\Pi) \cdot u + \rho f \cdot u$$

$$= \operatorname{div}(\Pi u) - \Pi : \nabla u + \rho f \cdot u$$

où $A, B \in \mathbb{R}^{N \times N} \to A : B = \operatorname{Tr}(A^T B) = \sum_{k,j=1}^{N} a_{k,j} b_{k,j}$

produit scalaire associé à la norme de Frobenius

sur $\mathbb{R}^{N\times N}$: $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}(A^T A) = \sum_{k,j=1}^{N} |a_{k,j}|^2$.

* Energie totale : $\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e$ est conservée

avec ρe : énergie interne

e : ——— spécifique

$\frac{1}{2}\rho|u|^2$: énergie cinétique

$\frac{1}{2}|u|^2$: ——— spécifique

Par la 1ère loi de la thermodynamique (dans un système fermé, la variation d'énergie est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur - par transfert thermique (chaleur) - transfert mécanique (travail)).

sans échange de matière

$$\frac{d}{dt}\int_{X(t,B)} \rho\left(\frac{1}{2}|u|^2 + e\right) = \int_{\partial X(t,B)} (\underline{\Pi u} - \underline{q})\cdot n \, d\sigma + \int_{X(t,B)} \underline{\rho f \cdot u} \, dx$$

q flux d'énergie thermique

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e\right) + \mathrm{div}\left(\left(\frac{1}{2}\rho|u|^2 + \rho e\right)u\right) = \mathrm{div}(\Pi u) - \mathrm{div}(q) + \rho f\cdot u \quad \text{dans } I\times\Omega \qquad (3)$$

En faisant (3) - (2).u, on obtient

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \mathrm{div}(\rho e u)} = + \Pi : \nabla u - \mathrm{div}(q)$$

dérivée particulaire
de l'énergie interne ρe

Équations constitutives : On veut "déterminer" Π, e, q
en fonction de
la physique du problème

* Loi de Stokes :

$$\Pi = S(u) - p I_N$$

tenseur des contraintes
visqueuses
et p pression

$$S(u) = \tilde{S}(Du) \quad \text{où} \quad Du = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

Cas newtonien = cas linéaire : il existe 2 fonctions
μ et λ telles que

$$\begin{aligned} S(u) &= 2\mu D(u) + \lambda \operatorname{Tr}(Du) I_N \\ &= 2\mu \left(D(u) - \frac{1}{N}\operatorname{Tr}(D(u)) I_N\right) \\ &\quad + \zeta \operatorname{Tr}(Du) I_N \end{aligned}$$

$$\left(\text{avec } \zeta = \lambda + \frac{2\mu}{N}\right)$$

Pour les fluides visqueux : $\mu > 0$, $\zeta \geq 0$

viscosité dynamique (μ)   viscosité de volume (ζ)

Cas $\mu \geq 0$, $\lambda \geq 0$ constants.

$$\text{div}(\Pi) = \text{div}(\mathbb{S}) - \text{div}(p I_N)$$
$$= \mu\left(\text{div}(\nabla u) + \text{div}(\nabla u)^T\right) + \lambda \,\text{div}\left(\text{div}(u) I_N\right)$$
$$- \text{div}(p I_N)$$

Or $\text{div}(p I_N) = \nabla p$

Et $\text{div}(\nabla u) = \Delta u = (\Delta u_i)_{i \in [\![1,N]\!]}$

$$\text{div}(\underbrace{\nabla u^T}) = \left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right)\right)_i$$

$$\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{i,j} \qquad = \nabla(\text{div}\, u)$$

Ainsi $\text{div}(\Pi) = \mu \Delta u + (\mu + \lambda) \nabla \text{div}(u) - \nabla p$

$$= -\mu \nabla \times (\nabla \times u) + (2\mu + \lambda) \nabla \text{div}(u) - \nabla p$$

car $\Delta u = \nabla \text{div}(u) - \nabla \times (\nabla \times u)$

$$\left(\text{dans } \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 \end{pmatrix}\right)$$

Equation d'état "pression - densité - température"

* Lois de pression :

- Loi des gaz parfaits : "$PV = nRT$"

$\rightsquigarrow$ $p(\rho,\theta) = a\rho\theta$ où $a>0$ est une constante

- Loi de Van der Waals pour des liquides

$$p(\rho,\theta) = \frac{a\rho\theta}{1-b\rho} - c\rho^2 \; , \quad a>0,\ b>0,\ c>0$$

- Cas général : $p(\rho,\theta) = p_e(\rho) + \theta \underbrace{p_{th}(\rho)}_{p_{th} \text{ croissant et } p_{th}(0)=0}$

* Seconde loi de la thermodynamique

Relation fondamentale de la thermodynamique :

$de = \theta ds - p dv$

où s est l'entropie (spécifique)

$v = \frac{1}{\rho}$ est le volume spécifique

e est l'énergie interne spécifique

On voit e comme une fonction $e(\theta, v)$

s ——————— $s(\theta, v)$

$$\rightsquigarrow \quad de = c_v \, d\theta + \left[\theta \frac{\partial p}{\partial \theta} - p\right] dv$$

(calculs)

$$\text{avec} \quad c_v = \left(\frac{\partial e}{\partial \theta}\right)\Big|_v = \theta \left(\frac{\partial s}{\partial \theta}\right)\Big|_v$$

On vérifie facilement que $\theta \dfrac{\partial p}{\partial \theta} - p = -p_c(\rho)$

Ainsi, en intégrant de (ρ_0, θ_0) à (ρ, θ) :

$$e(\rho,\theta) - e(\rho_0,\theta_0) = c_v(\theta - \theta_0) + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_c(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}^2} \, d\tilde{\rho}$$

si c_v = constante.

$$ds = \frac{1}{\theta} \frac{\partial e}{\partial \theta} d\theta + \frac{1}{\theta}\left(\frac{\partial e}{\partial \rho} - \frac{p(\rho,\theta)}{\rho^2}\right) d\rho$$

$$\rightsquigarrow \quad s(\rho,\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{c_v}{\tilde{\theta}} \, d\tilde{\theta} - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{th}(\tilde{\rho})}{\tilde{\rho}^2} \, d\tilde{\rho} + s(\rho_0, \theta_0)$$

Pour les gaz parfaits ($p(\rho,\theta) = a\rho\theta$ i.e. $p_c(\rho) = 0$ et $p_{th}(\rho) = a\rho$)

$$e(\rho,\theta) - e(\rho_0,\theta_0) = c_v(\theta - \theta_0)$$

$$s(\rho,\theta) - s(\rho_0,\theta_0) = c_v \log\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) - a \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)$$

$$\Rightarrow s(\rho,\theta) = \log\left(\frac{\theta^{c_v}}{\rho^{a}}\right) + \text{Cte}$$

Inégalité de Clausius - Duhem :

$$\frac{d}{dt}\int_{X(t,B)} \rho s \, dx + \int_{\partial X(t,B)} \frac{q(t,x)}{\theta(t,x)} \cdot n(t,x) \geq 0$$
$$\forall B \subset \Omega$$

(conséquence seconde loi thermodynamique)

On doit avoir $\mathbb{S}(u) : \nabla u \geq 0$ et $q \cdot \nabla \theta \leq 0$ pour que cette inégalité soit satisfaite.

Condition suffisante : on fait l'hypothèse $q = -K \nabla\theta$ avec $K > 0$.

(Loi de Fourier)

En effet :

On a $de = \theta\, ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$

donc $\frac{\partial e}{\partial t} = \theta \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}$ et $\nabla e = \theta \nabla s + \frac{p}{\rho^2} \nabla \rho$

d'où, comme $\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \operatorname{div}(\rho e u)}_{= \rho\left[\frac{\partial e}{\partial t} + u\cdot\nabla e\right]} = \mathbb{T} : \nabla u - \operatorname{div}(q)$,

$= \rho\left[\frac{\partial e}{\partial t} + u \cdot \nabla e\right]$ en utilisant la formule de conservation de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0$

(Rappelons que $\mathbb{T} = \mathbb{S}(u) - p I_N$)

on obtient $\rho\theta\left[\frac{\partial s}{\partial t}+u\cdot\nabla s\right]+\frac{p}{\rho}\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\cdot\nabla\rho\right]=S(u):\nabla u - p\,\mathrm{div}(u)-\mathrm{div}(q)$

donc $\rho\theta\left[\frac{\partial s}{\partial t}+u\cdot\nabla s\right]=S(u):\nabla u-\mathrm{div}(q)$

d'où $\frac{\partial}{\partial t}(\rho s)+\mathrm{div}(\rho s u)=\frac{1}{\theta}S(u):\nabla u-\mathrm{div}\left(\frac{q}{\theta}\right)-\frac{q}{\theta}\cdot\frac{\nabla\theta}{\theta}$ $\quad(\theta>0)$

Ainsi, en intégrant cette équation, on obtient $\forall B\subset\Omega\ \forall t\in I$

$$\frac{d}{dt}\int_{X(t,B)}\rho s\,dx=\int_{X(t,B)}\frac{1}{\theta}S(u):\nabla u\,dx-\int_{X(t,B)}\frac{q}{\theta}\cdot\frac{\nabla\theta}{\theta}\,dx-\int_{\partial X(t,B)}\frac{q}{\theta}\cdot n$$

L'inégalité de Clausius-Duhem est alors vérifiée si

$$\int_{X(t,B)}\frac{1}{\theta}S(u):\nabla u\,dx-\int_{X(t,B)}\frac{q}{\theta}\cdot\frac{\nabla\theta}{\theta}\geqslant 0$$

or $S(u):\nabla u=S(u):D(u)\underset{\geqslant 0}{=}2\mu\|Du\|^2+\lambda\,|\mathrm{Tr}(Du)|^2$ (dans le cas newtonien)

et si $\underbrace{q=-k\nabla\theta}_{\text{hypothèse : Loi de Fourier}}$, avec $k>0$, on a $-\frac{q}{\theta}\cdot\frac{\nabla\theta}{\theta}=k\left|\frac{\nabla\theta}{\theta}\right|^2\geqslant 0$.

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit en l'inconnue θ :

(Rappelons que $de=c_v\,d\theta+\frac{p_e(\rho)}{\rho^2}d\rho$)

$$\boxed{\rho c_v\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\cdot\nabla\theta\right)-\mathrm{div}(k\nabla\theta)=-\theta\,p_{\theta}(\rho)\,\mathrm{div}(u)+2\mu\|Du\|^2+\lambda\,|\mathrm{Tr}(Du)|^2}$$

En résumé : les équations sont

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0 \qquad \text{dans } I \times \Omega \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = \operatorname{div}(S(u)) - \nabla p \qquad \text{dans } I \times \Omega \qquad (2)$$

$$\rho c_v \left[\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla \theta\right] = \operatorname{div}(k \nabla \theta) - \theta\, p_{th}(\rho) + S(u) : D(u) \qquad \text{dans } I \times \Omega \qquad (3)$$

où $c_v = c_v(\theta)$, $S(u) = \mathcal{S}(D(u))$, $p(\rho, \theta) = p_e(\rho) + \theta p_{th}(\rho)$

dépendent des propriétés du fluide.

Cas particuliers :

* Fluide barotrope : la densité du fluide ne dépend que de la pression (et réciproquement)

Le système réduit aux équations (2) et (3) avec $p = p_e(\rho)$

* Cas incompressible : (homogène) $\left\{\begin{array}{l}\text{la densité initiale est constante} \\ \text{la vitesse du fluide est à divergence nulle}\end{array}\right.$, la conséquence est $\det(\nabla X) = 1$ en tout point de $I \times \Omega$. Cela signifie que le volume du fluide $X(t, B)$ est égal au volume du fluide dans B à t_0 $\forall t \in I$ $\forall B \subset \Omega$

Attention : dans ce cas la pression n'est plus une fonction d'état mais est une fonction indépendante correspondant à la contrainte d'incompressibilité (c'est un multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte).

l'équation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho = 0$ devient si $\underline{\rho_0 = cste}$, $\rho = \rho_0$ dans $I \times \Omega$

Le système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{div}(u) = 0 & \text{dans } I \times \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = \nu \Delta u - \nabla P & \text{dans } I \times \Omega \end{array}\right.$$

où $P = \frac{p}{\rho_0}$ et $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{viscosité cinématique}}}{\nu} = \frac{\mu}{\rho_0}$ ($\rho_0 = cste$ densité fixe ici) (on a utilisé les calculs page 9)

P est tq $\quad -\Delta P = \operatorname{div}((u \cdot \nabla) u)$ dans $I \times \Omega$ afin d'avoir $\operatorname{div}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0$

(remarque : $\operatorname{div}(\Delta u) = \Delta(\operatorname{div}(u)) = 0$ ici)