Proposition de sujet de thèse : “Répartition du nombre des facteurs premiers dans certains sous-ensembles rares d’entiers”

— **Date :** Rentrée 2024
— **Encadrants :** Cécile Dartyge [50%] et Thomas Stoll [50%]
— **Équipe, Laboratoire :** Analyse et Théorie des Nombres, Institut Élie Cartan de Lorraine (IECL), site de Nancy
— **Adresse :** Faculté des Sciences et Technologies, Boulevard des Aiguillettes, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy
— **Email :** `cecile.dartyge@univ-lorraine.fr` et `thomas.stoll@univ-lorraine.fr`

1 Motivation

On note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n et $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité. En ordre moyen, le nombre de facteur premiers distincts d’un entier compris entre 1 et x est $\log\log x$. En 1917, Hardy et Ramanujan ont montré le théorème suivant, considéré comme fondateur de la théorie probabiliste des nombres : pour presque tout entier $n \leq x$, $\omega(n)$ (resp. $\Omega(n)$) est proche de $\log\log x$. Autrement dit, un ordre normal de $\omega(n)$ est $\log\log n$. Plus précisément, ils ont montré que si ϕ est une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, alors

$$\log\log x - \phi(x)\sqrt{\log\log x} < \omega(n) < \log\log x + \phi(x)\sqrt{\log\log x},$$

pour presque tout $n \leq x$. Une extension spectaculaire du théorème de Hardy–Ramanujan est le théorème d’Erdős–Kac de 1939 qui décrit explicitement la loi limite. Il stipule que pour $K_{x,t}$ le nombre d’entiers n entre 1 et x tels que $\omega(n) \leq \log\log x + t\sqrt{\log\log x}$ où $t \in \mathbb{R}$ satisfait

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{K_{x,t}}{x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u,$$

donc la répartition de $\omega(n)$ tend vers une loi gaussienne.

Le sujet de thèse consiste à étudier la fonction arithmétique ω pour deux classes d’entiers, d’une part celle des premiers translatés, i.e. les entiers $p-1$ avec p premier, et d’autre part les entiers criblés, i.e. des entiers avec aucun facteur petit premier.

2 Répartition des valeurs de $\omega(p-1)$

L’ensemble des entiers de type $p-1$ avec p premier (ou plus généralement les nombres premiers translatés) est un ensemble emblématique en théorie analytique des nombres avec un long historique. Le problème classique de diviseurs de Titchmarsh [7] consiste en l’évaluation de

$$\sum_{1\leq p\leq x} \tau(p-a),$$

où $\tau(p-a)$ est le nombre des diviseurs de l'entier $p-a$ et $a \geq 1$ est un entier fixé, ce qui donne l'ordre moyen de τ le long des premiers translatés.

Des analogues ont été récemment établis pour $\omega(p-1)$ vis-à-vis des aspects de répartition mentionnés ci-dessus. Goudout [4] a démontré que les valeurs de $\omega(p-1)$ quand $p \in [x, 2x]$ (p premier) tendent à se répartir également selon une loi gaussienne de moyenne et de variance $\log\log x$. Cela correspond à l'heuristique selon laquelle la factorisation des premiers translatés est semblable à celle des entiers naturels. Une question toujours ouverte est la détermination du nombre de premiers $p \leq x$ tels que $\omega(p-1)$ est proche de $\lambda \log\log x$ avec $\lambda \neq 1$. La première partie de ce sujet de thèse consiste à étudier en détail le cas $\lambda = 2$.

Une motivation pour traiter ce cas particulier est que même si ces entiers forment un ensemble rare, leur contribution dans la somme $\sum_{p\leq x} 2^{\omega(p-1)}$ est prépondérante comme l'atteste l'article récent de Gorodetsky et Grimmelt [3] démontrant pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé la formule :

$$\sum_{p\in[x,2x],\omega(p-1)\leq 2\log\log x+t\sqrt{2\log\log x}} 2^{\omega(p-1)} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-u^2/2}\mathrm{d}u$$

quand x tend vers $+\infty$. Un des points importants consistera à étudier la répartition des valeurs

$$\omega(p-1, \lambda) = \sum_{\substack{q|p-1\\ q<n^\lambda}} 1,$$

dans un domaine en λ le plus grand possible, la lettre q désignant un nombre premier.

3 Entiers criblés avec k facteurs premiers, unimodalité de la fonction nombre de facteurs premiers le long d'ensembles rares

La fonction de comptage du nombre des entiers avec k facteurs premiers ainsi que celle du nombre d'entiers dont tous les facteurs premiers sont supérieurs à une borne y sont bien connues depuis les travaux de Buchstab, Landau, Selberg, etc. Cette partie du projet de thèse porte sur l'intersection de ces ensembles : les entiers criblés avec k facteurs premiers.

Notons

$$\pi_k(x, y) = \#\{n \leq x : \omega(n) = k \text{ et } P^-(n) > y\},$$

où $P^-(n)$ désigne le plus petit facteur premier de l'entier n. Cette quantité intervient dans de nombreux problèmes de théorie analytique des nombres. Stef [6] a par exemple recouru à cette fonction pour obtenir des minorations des cardinaux des ensembles

$$\mathcal{E}(x, k, T) = \{n \leq x : \Omega(n) = k \text{ et } P^-(n) > T\},$$

dans un grand domaine d'uniformité par rapport aux paramètre $k \in \mathbb{N}^*$ et $T \geq 2$. Ce résultat était un ingrédient essentiel pour son travail sur la minoration du cardinal de l'ensemble exceptionnel dans la conjecture d'Erdős sur la proximité des diviseurs. On trouvera dans [5] d'autres exemples d'utilisation de cette fonction.

Alladi [1] et Balazard [2] ont déterminé par diverses approches des estimations asymptotiques de $\pi_k(x, y)$. Les estimations d'Alladi sont valides quand la quantité $u = \log x/\log y$ tend vers l'infini avec x. Balazard obtient des estimations valables également pour u borné. Il démontre pour $R > 0$ donné la formule uniforme en $x \geq 3$, $\exp((\log\log x)^3) < y < x^{1/\max(2,k)}$, $1 \leq k \leq R\log u$:

$$\pi_k(x, y) = \frac{x}{\log x} f_k(u) + O_R\Big(\frac{x}{\log^x} \sqrt{k} \frac{(\log u)^k}{k!}\Big).$$

Les fonctions f_k sont définis par de délicates formules de récurrences. L'objectif de cette partie est double : d'une part augmenter les domaines de validité des formules de Balazard et d'Alladi et d'autre part clarifier les termes principaux de ces travaux.

Un dernier volet serait d'estimer de telles quantités pour des entiers n restreints à des ensembles donnés. Par exemple étudier $\omega(n-1)$ quand n est un entier avec peu de facteurs premiers.

Notons $\pi_k(x) = \pi_k(x, 2)$. Balazard a démontré que pour x assez grand la suite $\{\pi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ était unimodale (c'est-à-dire croissante jusqu'à une valeur $k < K_0(x)$ puis décroissante pour $k \geq K_0(x)$) résolvant ainsi une conjecture d'Erdős. Une question naturelle serait de vérifier si un tel phénomène persiste pour le entiers presque premiers translatés. Si on note pour $\mathcal{E} \subset \{1, \ldots x\}$, $\tilde{\pi}_\ell(\mathcal{E}) = \#\{n \in \mathcal{E} : \omega(n-1) = \ell\}$ on propose d'étudier le rapport $\frac{\tilde{\pi}_\ell(\mathcal{E}(x,k,T))}{\tilde{\pi}_{\ell+1}(\mathcal{E}(x,k,T))}$. Pour quels entiers ℓ ce rapport est-il supérieur à 1 ?

Références

[1] K. Alladi, The distribution of $\nu(n)$ in the sieve of Erastosthenes, Quart. J. Math. Oxford, (2), (**33**) (1982), 129-148.

[2] M. Balazard, Unimodalité de la distribution du nombre de diviseurs premiers d'un entier, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **40**, 2 (1990), 225-270.

[3] O. Gorodetsky and L. Grimmelt, On a conjecturee of Elliott concerning a probabilistic variant of Titchmarsh's divisor problem, prépublication (2023)

[4] É. Goudout, Erdős-Kac Theorem for integer translates with k prime factors, *J. Number Theory*, 210, (2020), 280-291.

[5] A. Raouj, A. Stef, G. Tenenbaum, Mesures quadratiques de la proximité des diviseurs, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **150**, (2011), 73-96.

[6] A. Stef, L'ensemble exceptionnel dans la conjecture d'Erdős concernant la proximité des diviseurs, Thèse de doctorat de Mathématiques, Université Nancy 1, (1992).

[7] E.C. Titchmarsh, A divisor problem, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **54**, (1930), 414–429.