Master 2 MFA – Recherche Mathématique de l’Université de Lorraine (Metz-Nancy)

Responsables : Samuel Tapie (Nancy) et Tilmann Wurzbacher (Metz)

Ce Master 2 propose une initiation à la recherche mathématique contemporaine. Il peut être le point d’aboutissement d’études mathématiques. C’est aussi une année permettant de s’orienter vers une thèse de doctorat et les métiers de la recherche mathématique. Il est adossé aux équipes de recherche de l’Institut Elie Cartan de Lorraine. Les cours peuvent tous être suivis en présentiel depuis Nancy et Metz.

Les cours proposés s’articulent en deux parcours thématiques qui varient d’une année sur l’autre, et couvrent la plupart des thématiques de recherche de l’IECL sur 4 ans. Chaque parcours propose deux cours par semestre. Chaque étudiant doit valider trois cours au premier semestre (septembre à janvier) et deux cours au second semestre (fin janvier à avril), suivis d’un stage de recherche en laboratoire.

Programme 2024-2025 : parcours « Probabilités » et parcours « Groupes de Lie, groupes algébriques » (détails ci-dessous)

Programme 2025-2026 : parcours « Equations au Dérivées Partielles » et parcours « Géométrie Différentielle »

Programme 2026-2027 : parcours « Probabilités – Statistiques » et parcours « Théorie Analytique des Nombres »

2024-2025

Parcours « Probabilités » :

1er semestre :

- **Processus stochastiques discrets (36h CM, 18h TD), Valentin Feray & Edouard Strickler :**

  Le but de ce cours est d’acquérir un arsenal d’outils utilisés dans l’étude de nombreux modèles probabilistes discrets, théoriques ou appliqués.

  Grandes lignes du programme :

  - chaînes de Markov : méthodes de Monte-Carlo, simulation par couplage par le passé, application au modèle d'Ising.
  - chaînes de Markov en temps continu (CTMC), théorie ergodique.
  - méthode des moments, lois caractérisées par leurs moments.
  - marches aléatoires, et compléments au théorème central limite : théorème local limite, grandes déviations, lemme cyclique, convergence fonctionnelle (théorème de Donsker)

- **Processus stochastiques à temps continu (36h CM, 18h TD), Yvain Bruned & Kolehe Coulibaly-Pasquier :**

  Ce cours est une introduction à la théorie des processus stochastiques en temps continu. Nous y décrirons ses objets classiques et leurs applications.

- processus gaussiens
- construction et propriétés du mouvement brownien
- martingales et semi-martingales
- intégrale d'Itô, équations différentielles stochastiques, théorème de Girsanov
- théorème de Lévis (caractérisation des martingales comme changement de temps d'un MB)

Références : Revuz et Yor, Rogers et Williams

2nd semestre :

- **Graphes aléatoires (30h CM), Pascal Moyal :**

  Ce cours est une introduction à la théorie des graphes aléatoire, en se focalisant sur trois modèles emblématiques.

  - Définitions générales; Connexité; Arbres; Familles indépendantes; Nombre chromatique; Couplages dans les graphes.
  - Le graphe aléatoire d'Erdös-Rényi : Méthodes des moments. Définition et premières propriétés; Transition de phase pour la connexité; Transition de phase pour le diamètre; Emergence de la composante géante.
  - L'arbre de Galton-Watson : Arbres enracinés infinis; Définition de l'arbre de Galton-Watson; Transition de phase pour la probabilité d'extinction; Exploration en profondeur - Inégalité de concentration pour la taille dans le cas sous-critique; Etude de l'arbre conditionné à survivre; Quelques applications.
  - Le modèle de configuration : Définition et propriétés; Graphicalité asymptotique; Lien avec les graphes uniformes Construction par appariement uniforme; Représentation markovienne.
  - Autres modèles - Processus markoviens sur des graphes : Le modèle d'attachement préférentiel; Le stochastic block model (SBM); L'algorithme glouton de famille indépendante maximale sur le graphe d'Erdös-Rényi et sur le modèle de configuration. Application aux réseaux radio-mobile. Processus de contagion sur des graphes aléatoires. Couplage en ligne sur le SBM.

- **Contrôle stochastique optimal (30h CM), Nabil Kazi-Tani :**

  Ce cours est une introduction à la résolution des problèmes contrôle stochastique par le principe de la programmation dynamique. Nous explorerons les liens entre ces problèmes de contrôle et une classe d'équations aux dérivées partielles, dite de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Dans le cas des problèmes de contrôle dits non markoviens, nous étudierons un outil probabiliste de résolution, à savoir les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR).

  Mots clés : Fonction valeur, Formule de Feynman-Kac, EDP de HJB, Représentation des martingales, EDS rétrogrades.

  Références :
  - Fleming, W. H., & Soner, H. M. (2006). Controlled Markov processes and viscosity solutions (Vol. 25). Springer Science & Business Media.
  - Touzi, N., & Tourin, A. (2013). Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE (Vol. 29). New York: Springer.

Parcours « Groupes de Lie, groupes algébriques » :

1er semestre :

- **Introduction aux groupes et algèbres de Lie (36h CM + 18h TD), Alexandre Afgoustidis & Saïd Benayadi & Angela Pasquale :**

- Algèbres de Lie : structures et propriétés générales, décomposition radicielle dans le cas semisimple.
- Algèbres symétriques et enveloppantes, modules de Verma.
- Groupes de Lie : structures et propriétés générales, l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, sous-groupes fermés d'un groupe de Lie, groupes de Lie matriciels et leurs algèbres de Lie, groupes de Lie classiques.

Références :
- Humphreys, James E. Introduction to Lie algebras and representation theory.
- Knapp, Anthony W. Lie groups beyond an introduction.

- **Groupes algébriques (36h CM + 18h TD), Benoit Cadorel & Pierre-Emmanuel Chaput & ZhiXin Xie :**

- «Kit de survie» en géométrie algébrique. Variétés algébriques, morphismes, dimension, espaces tangents. (10h CM + 6h TD)
- Groupes algébriques : définitions, algèbre de Lie d'un groupe algébrique, quotients d'un groupe algébrique par un sous-groupe fermé, éléments semi-simples et unipotents, sous-groupes résolubles et nilpotents, sous-groupes de Borel. (26h CM + 12h TD)

Référence : Humphreys, James E., Linear algebraic groups», chapitres 7 à 23 sauf 13,14 et 20

2nd semestre :

- **Représentations des groupes de Lie compacts (30h CM), Khalid Koufany & Salah Mehdi & Nicolas Prudhon :**

Groupes de Lie compacts, structure, tores maximaux, caractères, représentations, unitarité, irréductibilité, représentation régulière, théorème de Peter-Weyl, théorème du plus haut poids, liens entre les représentations des groupes de Lie compacts et les représentations de dimension finie des algèbres de Lie.

Références :
- Duistermaat, J. J.; Kolk, J. A. C. Lie groups.
- Knapp, Anthony W. Lie groups beyond an introduction.

- **Espaces homogènes et leur géométrie (30h CM), Benoit Cadorel & Lucas Fresse & Alain Genestier :**

- Compléments en groupes algébriques : centralisateurs des tores, structure des groupes réductifs, systèmes de racines, sous-groupes paraboliques (6h)

Référence : Humphreys, James E., Linear algebraic groups», chapitres 24 à 30

- Compléments en géométrie algébrique : variétés projectives, faisceaux, cohomologie.

Référence : Perrin Daniel, «Géométrie algébrique». (8h)

- Géométrie des espaces homogènes : décomposition de Bruhat de G/P, groupe de Picard de G/P, variétés de Schubert, résolution de Bott-Samelson, singularités des variétés de Schubert (normalité et singularités rationnelles), groupe de Picard et groupe des diviseurs des variétés de Schubert. (16h)

Référence : Brion, Michel, «Lectures on the geometry of flag varieties»