Références du cours

[Hum75] Chapter I: Algebraic geometry;
[Har77] Chapter I: Varieties;
[Har92] Lectures 1, 2, 5, 7, 11, 14.

References

[Har77] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, No. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Har92] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, No. 133, Springer-Verlag, New York, 1992.

[Hum75] J. E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics, No. 21, Springer-Verlag, 1975.

Algèbre commutative

Tous nos anneaux sont commutatifs unitaires.

1. Chapitre I

Définition-Proposition 1.1. Soit R un anneau. On a l'équivalence entre :

(i) tout idéal de R est de type fini ;

(ii) toute suite croissante d'idéaux est stationnaire ;

(iii) toute partie non vide d'idéaux admet un élément minimal.

On dira que l'anneau R est noethérien s'il vérifie ces propriétés.

Théorem 1.2. (Théorème d'Hilbert) *Soit R un anneau noethérien. Alors l'anneau $R[X_1, \ldots, X_n]$ est un anneau noethérien.*

On utilse souvent le théorème sous la forme suivante. Si k est un corps, alors $k[X_1, \ldots, X_n]$ est un anneau noethérien, c'est-à-dire pour tout idéal $I \subseteq k[X_1, \ldots, X_n]$, il existe $f_1, \ldots, f_r \in k[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$.

2. Chapitre II

Définition 2.1. Un anneau *gradué* est un anneau R avec une décomposition

$$R = \bigoplus_{d \geq 0} R_d$$

en somme directe de groupes abéliens R_d tels que pour tous indices $d, e \geq 0$, on a

$$R_d \cdot R_e \subseteq R_{d+e}.$$

- Un élément de R_d est appelé un *élément homogène de degré d*.
- Un idéal $I \subseteq R$ est un idéal homogène si

$$I = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap R_d).$$

Définition 2.2. Soit R un anneau. On dit que R est un *anneau local* si R possède un unique idéal maximal. Le quotient d'un anneau local R par son unique idéal maximal s'appelle le *corps résiduel* de R.

2.1. **Localisation.** Soit R un anneau et soit S une partie multiplicative de R, c'est-à-dire telle que $1 \in S$ et $S \cdot S \subseteq S$. Le but est de construire un anneau où les éléments de S deviennent inversibles.
La procédure est analogue à celle de la construction du corps des fractions d'un anneau intègre (où l'on prend pour S l'ensemble de tous les éléments non nuls). Plus précisément, on définit sur $S \times R$ une relation d'équivalence en posant

$$(s, a) \sim (s', a') \iff \exists t \in S : (as' - a's)t = 0.$$

On note $\frac{a}{s}$ la classe d'équivalence de (s, a) et $S^{-1}R$ l'ensemble des classes d'équivalence. On munit de ce dernier d'une structure d'anneau en posant

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + a's}{ss'} \text{ et } \frac{a}{s} \cdot \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}.$$

On vérifie facilement que ces définition compoatible avec la relation d'équivalence. Les élément de S deviennent ainsi inversibles dans $S^{-1}R$.
Le noyau de l'application canonique

$$\begin{aligned} R &\to S^{-1}R \\ a &\mapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

est l'idéal

$$\{a \in R \mid \exists s \in S : as = 0\}.$$

Elle est donc injective si et seulement si S ne contient aucun diviseur de 0. L'anneau $S^{-1}R$ est nul si et seulement si S contient 0.
Soit $I \subseteq S^{-1}R$ un idéal. On note $I \cap R$ l'idéal image inverse de I par l'application canonique $R \to S^{-1}R$. On vérifie que l'on a

$$(I \cap R)S^{-1}R = I,$$

où $(I \cap R)S^{-1}R$ désigne l'idéal de $S^{-1}R$ engendré par l'image de $I \cap R$ par l'application canonique $R \to S^{-1}R$.

Définition 2.3. Si $\mathfrak{p} \subseteq R$ est un idéal premier, la partie $S \coloneqq R \backslash \mathfrak{p}$ est multiplicative et on note

$$R_{\mathfrak{p}} \coloneqq S^{-1}R.$$

C'est un anneau local appelé *localisé de R en $\mathfrak{p}$*.

Notons que l'unique idéal maximal de $R_{\mathfrak{p}}$ est $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ et son corps résiduel $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ est le corps des fraction de l'anneau intègre $R/\mathfrak{p}$. En particulier, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de R, le *corps résiduel* de l'anneau local $R_{\mathfrak{m}}$ est $R/\mathfrak{m}$.

3. Chapitre III

3.1. Dimension de Krull.

Définition 3.1. Soit R un anneau. On appelle *dimension de Krull* de R, notée $\dim(R)$, le supremum des longueurs n des chaînes

$$\mathfrak{p}_n \supsetneq, \dots, \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_0$$

d'idéaux premiers de R.

Soit $\mathfrak{p} \subseteq R$ un idéal premier. Les idéaux premiers de l'anneau $R_\mathfrak{p}$ sont en correspondance bijective (et croissante) avec les idéaux premiers de R contenus dans $\mathfrak{p}$, et la dimension de Krull de l'anneau $R_\mathfrak{p}$ est donc le supremum des longueurs n des chaînes d'idéaux premiers de R terminant en $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire du type

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n \supsetneq, \dots, \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \mathfrak{p}_0.$$

Définition 3.2. Soient R un anneau et $\mathfrak{p} \subseteq R$ un idéal premier. On appelle la *hauteur* de $\mathfrak{p}$, notée $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, la dimension de Krull de l'anneau $R_\mathfrak{p}$.

Si R est noethérien, la hauteur de tout idéaux premier $\mathfrak{p}$ est finie, majorée par le cardinal d'un ensemble quelconque de générateurs de $\mathfrak{p}$.

Théorem 3.3. *Soient k un corps et A une k-algèbre de type fini. On a*

$$\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) + \dim(A/\mathfrak{p}) = \dim(A).$$

3.2. Degré de transcendance.

Définition 3.4. Soit $K \subseteq L$ une extension de corps. Une partie B de L est une *base de transcendance* de L sur K si

- les éléments de B sont algébriquement indépendants sur K ;
- le corps L est une extension algébrique du corps $K(B)$

Exemple 3.5. Par exemple, $\{X_1, \dots, X_n\}$ est une base de transcendance de $K(X_1, \dots, X_n)$ sur K, tandis que $\emptyset$ est une base de transcendance de n'importe quelle extension algébrique.

Si $K \hookrightarrow L$ est une extension de corps de type fini et $S \subseteq L$ est une partie finie telle que $L = K(S)$, un sous-ensemble B de S algébriquement indépendant maximal est une base de transcendance finie de L sur K, et L est une extension finie de $K(B)$. Pour une extension de type fini, il existe donc toujours une base de transcendance finie.

Définition-Proposition 3.6. Soit $K \hookrightarrow L$ une extension de corps admettant une base de transcendance finie.

(i) Soit $B \subseteq L$ une partie finie formée d'éléments algébriquement indépendants et soit $S \subseteq L$ une partie telle que L est algébrique sur $K(S)$. Alors $\mathrm{Card}(S) \geq \mathrm{Card}(B)$.

(ii) Toutes les bases de transcendance de L sur K ont le même cardinal fini.

Alors le cardinal commun fini des bases de transcendance de L sur K s'appelle le *degré de transcendance de L sur K* ; on le note $\deg.\mathrm{tr}_K L$.

Théorem 3.7. *Soient k un corps et A une k-algèbre intègre de type fini de corps de fractions K_A. On a*

$$\dim(A) = \deg.\mathrm{tr}_k K_A.$$

4. Chapitre IV

Définition 4.1. Soit R un anneau non nul. On définit son *radical de Jacobson* comme l'intersection d'idéaux maximaux, c'est-à-dire

$$\mathrm{rad}(R) := \bigcap_{\mathfrak{m} \subseteq R} \mathfrak{m}.$$

C'est un idéal de R.

Théorem 4.2. (Lemme de Nakayama) *Soit R un anneau non nul, soit I un idéal contenu dans* $\mathrm{rad}(R)$ *et soit M un R-module de type fini.*

(i) Si $IM = M$, on a $M = 0$.

(ii) Soient $m_1, \ldots, m_n$ des éléments de M. Si les images de $m_1, \ldots, m_n$ dans M/IM engendrent ce R-module, alors $m_1, \ldots, m_n$ engendrent M.

Le lemme de Nakayama est particulièrement utile lorsque R est un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. L'hypothèse de (i) se réduit alors à $\mathfrak{m}M = M$, tandis que l'hypothèse de (ii) est que les images $m_1, \ldots, m_n$ dans $M/\mathfrak{m}M$ engendrent cet $R/\mathfrak{m}M$-espace vectoriel.