# Exercices

## Chapitre I

### Exercice 1

(1) Soient $E$ un espace topologique et $V$ une partie de $E$. Montrer que $V$ munie de la topologie induite est irréductible si et seulement si $\overline{V}$ l'est.

(2) Soient $E$ et $F$ des espacs topologiques et $u\colon E \to F$ une application continue dominante. Si $E$ est irréductible, montrer que $F$ l'est aussi.

### Exercice 2

Soit $k$ un corps. Soient $f$ et $g$ des élément de $k[X,Y]$ sans facteur commun.

(1) Utiliser le théorème de Bézout dans l'anneau principal $k(X)[Y]$ pour montrer que $V(f) \cap V(g)$ est fini.

(2) En déduire que si $f$ est irréductible et $V(f)$ est infini, alors on a $I\big(V(f)\big) = (f)$ et $V(f)$ est irréductible. Montrer par un exemple que $V(f)$ peut être réductible, même si $f$ est irréductible.

(3) Supposons que le corps $k$ est infini. Soit $C$ la courbe plane d'équation $X^2 = Y$. Monter que $I(C) = (X^2 - Y)$.

### Exercice 3

Soient $k$ un corps infini et $C$ la courbe plane d'équation

$$X^2 = Y^3.$$

(1) Montrer que $C$ est irréductible et déterminer l'idéal de $C$.

(2) Monter que l'anneau $A(C)$ n'est pas principal. En déduire que $A$ n'est pas isomorphe à $k[X]$ et que $C$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{A}^1_k$.

## Chapitre II

### Exercice 4

On considère l'application

$$\begin{aligned} u\colon \mathbb{P}^1 &\to \mathbb{P}^3 \\ (s,t) &\mapsto (s^3, s^2t, st^2, t^3). \end{aligned}$$

(1) Posons $I = (X_0X_3 - X_1X_2, X_1^2 - X_0X_2, X_2^2 - X_1X_3)$. Montrer que l'image $C$ de $u$ est la variété projective $V(I)$.

(2) Monter l'égalité $I(C) = I$.

**Exercice 5**
Fixons l'hyperplan à l'infini $H_0$ d'équation $X_0 = 0$ dans $\mathbb{P}^n$, ce qui permet d'identifier l'espace affine $\mathbb{A}^n$ à l'ouvert de Zariski $U_0 := \mathbb{P}^n \backslash H_0$. On va faire le lien entre les sous-variétés affines de $\mathbb{A}^n$ et les sous-variétés projectives de $\mathbb{P}^n$.
Pour cela, nous introduisons les notions suivantes :

- Soit $f$ un élément de $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. On appelle *homogénéisé de* $f$ le polynôme $f^\sharp$ défini par
$$f^\sharp(X_0, \ldots, X_n) := X_0^{\deg f} \cdot f(\frac{X_1}{X_0}, \ldots, \frac{X_n}{X_0}).$$
Si $I$ est un idéal de $A$, on note $I^\sharp$ l'idéal de $R$ engendré par les homogénéisés des éléments de $I$.
- Soit $f$ un élément de $R = k[X_0, X_1, \ldots, X_n]$. On appelle *déshomogénéisé de* $f$ le polynôme $f_\flat$ défini par
$$f_\flat(X_1, \ldots, X_n) := f(1, X_1, \ldots, X_n).$$
Si $J$ est un idéal de $R$, on note $J_\flat$ l'idéal de $A$ engendré par les déshomogénéisés des éléments de $J$.

Montrer que la topologie de Zariski sur $\mathbb{P}^n$ induit la topologie de Zariski sur $\mathbb{A}^n$. Plus précisément, on a :

(1) Soit $X = V(J)$ une sous-variété projective de $\mathbb{P}^n$. L'intersection $X \cap U_0$ est une sous-variété affine, égale à $V(J_\flat)$.
(2) Soit $V = V(I)$ une sous-variété affine de $\mathbb{A}^n$. On a $\overline{V} = V(I^\sharp)$ et $V = \overline{V} \cap U_0$.

**Exercice 6**

(1) Soit $Y$ une hypersurface dans $\mathbb{A}^n$ d'équation
$$f(X_1, \ldots, X_n) = 0.$$
Montrer que $\mathbb{A}^n \backslash Y$ est isomorphe à l'hypersurface $H$ dans $\mathbb{A}^{n+1}$ d'équation $X_{n+1} f = 1$.
(2) Soient $X$ une sous-variété affine de $\mathbb{A}^n$ et $f$ une fonction régulière sur $X$. En déduire que l'ouvert $X_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ est isomorphe à une sous-variété affine de $\mathbb{A}^{n+1}$ (c'est donc une variété affine), et que l'anneau $A(X_f)$ est isomorphe au localisé $A(X)_f$.
(3) Soient $X$ une variété quasi-projective et $x \in X$ un point. Monter qu'il existe un ouvert affine de $X$ contenant $x$.

**Exercice 7**
Soient $X$ une variété quasi-projective et $x \in X$ un point. On considère les couples $(f, U)$, où $U \subseteq X$ est un ouvert contenant $x$ et $f$ une fonction régulière sur $U$.
On dit que tels couples $(f, U)$ et $(g, V)$ sont équivalents si $f$ et $g$ coïncident sur $U \cap V$. On appelle les classes d'équivalence les *germes de fonctions régulière en* $x$. Ils forment une $k$-algébre que l'on note $\mathcal{O}_{X,x}$.

(1) Montrer que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local d'idéal maximal l'ensemble $\mathfrak{m}_{X,x}$ des germes de fonctions régulières nulles en $x$.

(2) Supposons que $X$ est une variété affine et soit $x \in X$ un point. Montrer que $\mathcal{O}_{X,x}$ s'identifie à l'anneau local $A(X)_{\mathfrak{m}_x}$, où $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de $A(X)$ des fonctions nulles en $x$.

(3) Montrer que si $U$ est un voisinage ouvert affine de $x$, alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{U,x}$, donc à $A(U)_{\mathfrak{m}_x}$.

**Exercice 8**
On définit une application injective

$$u\colon \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1},$$
$$\big((x_0,\dots,x_m),(y_0,\dots,y_n)\big) \mapsto (\dots,x_iy_j,\dots).$$

dite *application de Segre.*

(1) Montrer que l'image $\Sigma_{m,n}$ de $u$ est la variété projective définit par les équation $Z_{i,j}Z_{k,l} = Z_{i,l}Z_{k,j}$ (c'est l'ensemble des matrices $(m+1)\times(n+1)$ de rang 1).
Cela fait de $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ une variété projective, dont les sous-variétés sont par définition les images inverses par $u$ des sous-variétés de $\mathbb{P}^{(m+1)(n+1)-1}$.

(2) On dit qu'un polynôme $f(X_0,\dots,X_m,Y_0,\dots,Y_n)$ est *bihomogène de degré* $(d,e)$ s'il vérifie, pour tout $\lambda,\mu \in k$,

$$f(\lambda X_0,\dots,\lambda X_m,\mu Y_0,\dots,\mu Y_n) = \lambda^d\mu^e f(X_0,\dots,X_m,Y_0,\dots,Y_n).$$

Montrer que les sous-variété de $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ sont exactement les lieux des zéros communs de polynômes bihomogènes.

(3) Prenons des variétés projective $X \subseteq \mathbb{P}^m$ et $Y \subseteq \mathbb{P}^n$. Vérifier les propriétés suivantes :
  (i) $X \times Y$ est une sous-variété de $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ ;
  (ii) les projections $X \times Y \to X$ et $X \times Y \to Y$ sont des applications régulières ;
  (iii) pour toute variété quasi-projective $Z$, une application $Z \to X \times Y$ est régulière si et seulement si chacune de ses composantes $Z \to X$ et $Z \to Y$ l'est.

(4) Vérifier que la structure de variété sur $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$ coïncide avec celle obtenue par l'isomorphisme $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n \simeq \mathbb{A}^{m+n}$.

(5) Soient $X \subseteq \mathbb{P}^m$ une sous-variété et $g\colon X \to \mathbb{P}^n$ une application régulière. Montrer que le graphe $\Gamma_g$ de l'application $u$ est une sous-variété de $X \times \mathbb{P}^n$.

## Chapitre III

**Exercice 9**
Soient $X$ une variété affine irréductible et $Y$ une sous-varété irréductible de codimension $r$.

(1) Montrer qu'il existe $f_1,\dots,f_r$ dans $A(X)$ tels que $Y$ soit une composante irréductible de $V(f_1,\dots,f_r)$.

(2) En déduire que la dimension de Krull de l'anneau local $A(X)_{I(Y)}$ est $r$.

**Exercice 10**

(1) Soient $X$ une variété affine de dimension pure $n$ et $x \in X$ un point. Montrer qu'il existe des fonction régulières $f_1, \dots, f_n$ nulles en $x$ telles que $V(f_1, \dots, f_n)$ soit fini.

(2) Soient $X$ et $Y$ deux variétés irréductibles et $u \colon X \to Y$ une application régulière dominante. Montrer que pour tout $x$ dans $X$, on a

$$\dim_x X_x \geq \dim X - \dim Y,$$

où $X_x$ est la fibre de $u$ contenant $x$, c'est-à-dire $u^{-1}\big(u(x)\big)$.

**Exercice 11**
Soient $X$ et $Y$ des variétés. Montrer que

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y.$$

**Chapitre IV**

**Exercice 12**
Soit $C \subseteq \mathbb{A}^2$ la courbe plane d'équation

$$X^2 = Y^3.$$

Déterminer le lieu singulier de la courbe $C$.

**Exercice 13**
Montrer que les points singuliers d'une hypersurface $X$ dans $\mathbb{P}^n$ d'idéal engendré par un polynôme homogène $f$ de degré $d$ sont définis par les équations

$$f(x) = \frac{\partial f}{\partial X_0}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial X_n}(x) = 0.$$

**Exercice 14**
Soient $X \subseteq \mathbb{P}^n$ une hypersurface de degré au moins deux et $L \subseteq X$ un sous-espace linéaire. Montrer que $\dim L \leq \frac{n-1}{2}$.

Un groupe $G$ est dit *algébrique* si $G$ est une variété algébrique munie d'une structure de groupe telle que la multiplication $G \times G \to G, (g,h) \mapsto g \cdot h$ et l'inverse $G \to G, g \mapsto g^{-1}$ sont des applications régulières.

**Exercice 15**
Soient $G$ un groupe algébrique irréductible et $X$ un espace homogène algébrique sous $G$, c'est-à-dire une variété algébrique munie d'une opération trasitive $G \times X \to X$ qui est une application régulière.

(1) Soient $x \in X$ un point et $G_x \subseteq G$ l'ensemble des stabilisateurs du point $x$. Justifier que $\dim G_x$ ne dépend pas du point $x$. Montrer que

$$\dim X = \dim G - \dim G_x.$$

(2) Montere que $X$ est lisse.