TD 1

Exercice 1

Soit $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs, et $(S_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, telles que pour tout $n \geq 1$, S_n suit une loi exponentielle de paramètre λ_n. Le but de cet exercice est de montrer que

(i) Si $\sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1} < +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\sum_{n\geq 1} S_n < +\infty\right) = 1$;

(ii) Si $\sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1} = +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\sum_{n\geq 1} S_n = +\infty\right) = 1$.

1. Justifier que $\mathbb{E}(\sum_{n\geq 1} S_n) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1}$.
2. En déduire l'item (i).
3. En utilisant la loi forte des grands nombres, montrer l'implication (ii) dans le cas particulier où $\lambda_n = \lambda$ pour tout $n \geq 1$.
4. Montrer que pour une variable aléatoire X à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a $\mathbb{E}(e^{-X}) = 0$ si et seulement si $X = +\infty$ presque sûrement.
5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}(e^{-S_n}) = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}$.
6. Justifier que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty$ implique $\prod_{n\geq 1} \left(1 + \frac{1}{\lambda_n}\right) = +\infty$.
7. Conclure.

Exercice 2

Définition 0.1 *Un processus stochastique $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de comptage si pour presque tout ω, la trajectoire $t \mapsto N_t(\omega)$ est croissante par sauts d'amplitude 1, continue à droite et telle que $N_0 = 0$.*

Définition 0.2 *Un processus stochastique $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre (ou d'intensité) $\lambda > 0$ si*

(i) $(N_t)_{t\geq 0}$ *est un processus de comptage*

(ii) $(N_t)_{t\geq 0}$ *est à accroissements indépendants : pour tous $t, s \geq 0$, $N_{t+s} - N_t$ est indépendant de $\sigma(N_u, u \leq t)$*

(iii) $(N_t)_{t\geq 0}$ *est à accroissements stationnaires : pour tous $t, s \geq 0$, $N_{t+s} - N_t$ a la même loi que N_s*

(iv) Pour tout $t \geq 0$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt.

Le but de cet exercice est de montrer qu'un processus de Poisson est une chaîne de Markov à temps continu, dont on donnera la matrice d'intensité. Comme dans le cours, on notera $(J_n)_{n\geq 0}$ la suite des instants de sauts, $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des temps d'attente, et $(Y_n)_{n\geq 0} = (X_{J_n})_{n\geq 0}$ la chaîne incluse.

1. Justifier que la chaîne incluse $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps discret, et préciser sa matrice de transition.

2. Le but de cette question est de montrer que pour tout $n \geq 1$, le vecteur $(J_1, \dots, J_n)_{n\geq 1}$ a pour densité
$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathbb{1}_{0<u_1\leq \dots \leq u_n}$$
   a. Expliquer rapidement pourquoi il suffit de calculer
   $$\mathbb{P}\left(J_1 \in]s_1, t_1], \dots, J_n \in]s_n, t_n]\right)$$
   pour tous $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \dots \leq s_n < t_n$.
   b. Justifier que rour tous $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \dots \leq s_n < t_n$, on a $J_1 \in]s_1, t_1], \dots, J_n \in]s_n, t_n]$ si et seulement si
      - $N_{s_i} - N_{t_i - 1} = 0$; pour tout $1 \leq i \leq n$;
      - $N_{t_i} - N_{s_i} = 1$; pour tout $1 \leq i \leq n-1$;
      - $N_{t_n} - N_{s_n} \geq 1$

   et conclure.
3. Déduire de la question précédente la loi de $(S_1, \dots, S_n)$, puis que $(N_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu, dont on donnera la matrice d'intensité.
4. Le processus de Poisson peut-il exploser ?

Exercice 3

Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un procesus de Poisson d'intensité λ. Soit $t > 0$, montrer que conditionnellement à $N_t = 1$, le premier temps de saut suit une loi uniforme sur $[0, t]$.

Exercice 4

Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un procesus de Poisson d'intensité λ. Soit $t > 0$ et $n \geq 1$, montrer que conditionnellement à $N_t = n$, le vecteur $(J_1, \dots, J_n)$ a la même loi que n variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0, t]$, ordonnées par ordre croissant (statistique d'ordre).

Exercice 5

Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un procesus de Poisson d'intensité λ, et $(M_t)_{t\geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité μ, indépendant de $(N_t)_{t\geq 0}$. Montrer que $(N_t + M_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson, d'intensité $\lambda + \mu$.

Exercice 6

Le but de cet exercice est de montrer qu'un processus de comptage $(N_t)_{t\geq 0}$ avec des accroissements indépendants et stationnaires est nécessairement un processus de Poisson. On se donne donc un processus de comptage $(N_t)_{t\geq 0}$ avec des accroissements indépendants et stationnaires et nous allons montrer que pour tout $t \geq 0$, N_t suit une loi de Poisson.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre μ. Donner sa fonction génératrice.
2. Pour $u \in (0, 1]$ et $t \geq 0$, on pose $f_u(t) = \mathbb{E}(e^{uN_t})$. Exprimer $f_u(t+s)$ en fonction de $f_u(t)$ et $f_u(s)$.

3. Soit $u \in (0,1]$. Justifier que f_u est croissante et non identiquement nulle dès lors que N_t est non identiquement nul. Que peut-on en déduire dans ce cas ?
4. Justifier, pour $t > 0$, l'inclusion
$$\bigcup_{n\geq 0} \left\{N_{nt} = 0,\ N_{(n+1)t} \geq 2\right\} \subset \{J_2 < J_1 + t\}.$$
En déduire que
$$\frac{1}{1-\mathbb{P}(N_t = 0)}\mathbb{P}(N_t \geq 2) \leq \mathbb{P}(J_2 < J_1 + t),$$
puis que
$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\mathbb{P}(N_t \geq 2) = 0.$$
5. En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $u \in]0,1]$,
$$\lambda(u) := \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f_u(t) - 1) = c(u-1),$$
et conclure.

Exercice 7

A un arrêt de bus, les arrivées du bus A forment un processus de Poisson d'intensité un bus par heure, et les arrivées du bus B forment un processus de Poisson, indépendant, d'intensité sept bus par heure.

1. Quelle est la probabilité de voir passer exactement trois bus en une heure ?
2. Quelle est la probabilité de voir passer exactement trois bus B pendant que j'attends pour le bus A ?

Exercice 8

Un processus de naissance est une généralisation du processus de Poisson : c'est un processus de comptage, et le taux d'arrivée du prochain événement dépend du nombre d'événements déjà arrivés. Plus précisément, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus de naissance si c'est une chaîne de Markov à temps continu sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition
$$Q = \begin{pmatrix} -q_1 & q_1 & & \\ & -q_2 & q_2 & \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$
pour une suite de nombres positifs $(q_i)_{i\geq 1}$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\zeta = +\infty$ presque sûrement et une condition nécessaire et suffisante pour que $\zeta < +\infty$ presque sûrement. (On rappelle que ζ désigne le premier temps d'explosion de la chaîne).
2. Donner un exemple de processus de naissance qui explose.