Université de Lorraine–Metz
M2-MFA. Saïd Benayadi Année universitaire 2024-2025

Feuille de TD 1 - Algèbres de Lie.

Exercice 1.

Soit $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ une algèbre de Lie et soit $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ son algèbre de Lie des dérivations. Si A est une partie non vide de $\mathfrak{g}$, on notera $C(A) := \{x \in \mathfrak{g},\ [x, A] = \{0\}\}$ (appelé le centralisateur de A et le centre de $\mathfrak{g}$ lorsque $A = \mathfrak{g}$, dans ce cas $C(A)$ sera noté $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$) et $N(A) := \{x \in \mathfrak{g},\ [x, A] \subseteq A\}$ (appelé le normalisateur de A). Rappelons aussi qu'un sous-espace vectoriel V de G est dit in idéal caractéristique de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ (ou de $\mathfrak{g}$).

1. Montrer que $N(A)$ est une sous-algèbre de Lie de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$.

2. Si A est une sous-algèbre de Lie de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$, montrer que A est un idéal de la sous-algèbre de Lie $N(A)$.

3. Montrer que $C(A)$ est une sous-algèbre de Lie de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$.

4. Montrer qu'un idéal caractéristique de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ est un idéal de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$.

5. Montrer que $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est un idéal caractéristique de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$.

Exercice 2.

Soit $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ une algèbre de Lie. On considère les deux suites de parties de $\mathfrak{g}$ suivantes:

$$C^1(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad C^{n+1}(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, C^n(\mathfrak{g})],\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}^\star;$$

$$D^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}, \quad D^{n+1}(\mathfrak{g}) := [D^n(\mathfrak{g}), D^n(\mathfrak{g})],\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n(\mathfrak{g}) \subseteq C^{n+1}(\mathfrak{g})$.

2. Montrer que $(C^n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite décroissante d'idéaux caractéristiques de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ (appelée la suite centrale descendante de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$).

3. Montrer que $(D^n(\mathfrak{g}))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'idéaux caractéristiques de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ (appelée la suite dérivée de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$. En particulier, $D^1(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ est l'idéal dérivé de $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$).

Une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ est dite nilpotente (resp. résoluble) s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $D^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$ (resp. s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $C^n(\mathfrak{g}) = \{0\}$.)

4. Montrer que si $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ est nilpotente, alors $(\mathfrak{g}, [\,,\,])$ est résoluble. A-t-on la réciproque?

5. Montrer que si $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ est nilpotente telle que $\mathfrak{g} \neq \{0\}\}$, alors $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq \{0\}\}$.

6. Donner un exemple d'algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ résoluble non réduite à zéro avec un centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}\}$.

Exercice 3.

Rappelons qu'une algèbre de Lie $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ est dite complète si son centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ est égal à $\{0\}$ et toute dérivation de $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ est intérieure (c-à-d. $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \mathrm{ad}(\mathfrak{g}) =: \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$).

1. Montrer qu'il existe une unique algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ non abélienne de dimension 2 à isomorphisme près. Montrer qu'il existe une base $\{a, b\}$ de $\mathfrak{r}$ telle que $[a, b] = b$.

2. Montrer que $\mathfrak{r}$ est une algèbre de Lie complète.

3. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\mathcal{I}$ un idéal complet de $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ (c-à-d. en tant qu'algèbre de Lie $\mathcal{I}$ est complète). Montrer qu'il exite $\mathcal{J}$ un idéal de $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ tel que $\mathfrak{g} = \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ (indication: $\mathcal{J}$ est le centralisateur de $\mathcal{I}$ dans $\mathfrak{g}$).

Exercice 4.

Soient $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ et $(\mathcal{H}, [\ ,\ ]_{\mathcal{H}})$ deux algèbres de Lie et $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{H})$ est une représentation de $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ dans $\mathcal{H}$ telle que $\rho(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Der}(\mathcal{H}, [\ ,\ ]_{\mathcal{H}})$.

1. Montrer que l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \times \mathcal{H}$ muni du crochet

$$[(X, a), (Y, b)] := ([X, Y]_{\mathfrak{g}}, [a, b]_{\mathcal{H}} + \rho(X)(b) - \rho(Y)(a)),$$

$\forall\, (X, a), (Y, b) \in \mathfrak{g} \times \mathcal{H}$, est une algèbre de Lie. Cette algèbre de Lie $(\mathfrak{g} \times \mathcal{H}, [\ ,\ ])$ est appelée le produit semi-direct de $(\mathcal{H}, [\ ,\ ]_{\mathcal{H}})$ par $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ]_{\mathfrak{g}})$ au moyen de ρ et on le note $\mathfrak{g} \ltimes_\rho \mathcal{H}$. On notera, parfois, l'espace vectoriel $\mathfrak{g} \times \mathcal{H}$ par $\mathfrak{g} \oplus \mathcal{H}$.

2. Vérifier que $\mathfrak{g} \times \{0\}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g} \ltimes_\rho \mathcal{H}$ et que $\{0\} \times \mathcal{H}$ est un idéal de $\mathfrak{g} \ltimes_\rho \mathcal{H}$.

Exercice 5.

Soit $\mathfrak{g} := \mathrm{Vect}\{X, Y, Z\}$ muni du crochet (application bilinéaire anti-symétrique) $[\ ,\ ]$ définie par:

$$[X, Y] = 0,\ [X, Z] = [Y, Z] = 0.$$

1. Montrer que $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ est une algèbre de Lie. Cette algèbre de Lie est appelé l'algèbre de Heisenberg de dimension 3 et sera notée $\mathcal{H}_3$. Vérifier que $\mathcal{H}_3$ est nilpotente.

2. Montrer que $\mathcal{H}_3$ est le produit semi-direct de l'algèbre de Lie abélienne de dimension 2 par l'algèbre de Lie de dimension 1 (qui est abélienne) par ρ (à préciser).

3. Notons δ l'endomorphisme de $\mathfrak{g} := \mathrm{Vect}\{X, Y, Z\}$ définie par

$$\delta(X) = Y, \quad \delta(Y) = -X, \quad \delta(Z) = 0.$$

Montrer que δ est une dérivation de $\mathcal{H}_3$.

4. Montrer que l'application linéaire $\pi : \mathbb{K} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{H}_3)$ définie par $\pi(1_{\mathbb{K}}) := \delta$ est une représentation de l'algèbre abélienne $(\mathbb{K}, [\, , \,] = 0)$ dans $\mathfrak{g} := \mathrm{Vect}\{X, Y, Z\}$. Si on note $T := 1$, vérifier que le crochet du produit semi-direct $\mathbb{K} \ltimes_\pi \mathcal{H}_3$ (qu'on peut aussi noter par $\mathbb{K} \ltimes_\delta \mathcal{H}_3$) est défini par les produits non nuls suivants des éléments de la base $\{T, X, Y, Z\}$:

$$[T, X] = X, \;\; [T, Y] = -Y, \;\; [X, Y] = Z.$$

Cette algèbre de Lie est appelée l'algèbre de l'oscillateur de dimension 4.

5. Montrer que cette algèbre de Lie est résoluble mais non nilpotente. Montrer que le centre de cette algèbre de Lie est $\mathrm{Vect}\{Z\}$.

6. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On considère les endomorphismes $L_X, \frac{d}{dX}$ et H de l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ définis par:

$$L_X(P(X)) := XP(X), \;\; \frac{d}{dX}(P(X)) = P'(X), \;\; \frac{1}{2}(L_X \circ L_X + \frac{d}{dX} \circ \frac{d}{dX}),$$

$\forall\, P(X) \in \mathbb{K}[X]$ (où $P'(X)$ est le polynôme dérivé de $P(X)$). Montrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{E} := \mathrm{Vect}\{H, \frac{d}{dX}, L_X, \mathrm{id}_{\mathbb{K}[X]}\}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathbb{K}[X])$ qui est isomorphe à l'algèbre de l'oscillateur $\mathbb{K} \ltimes_\delta \mathcal{H}_3$).