Annexes : partie géométrie algébrique

On travaille sur un corps k algébriquement clos.

Annexe A. Image d'une application régulière

Théoreme A.1. *Si Y est une variété projective et X une variété quasi-projective, la projection $p\colon X \times Y \to X$ est fermée.*

Corollaire A.2. *Soit X une variété projective. Toute application régulière $X \to \mathbb{P}^n$ est fermée.*

Corollaire A.3. *Toute fonctions régulières sur une variété projective connexe est constante.*

Corollaire A.4. *Soit X une sous-variété connexe de $\mathbb{P}^n$ non réduit à un point. Alors X rencontre toute hypersurface de $\mathbb{P}^n$.*

Annexe B. Applications génériquement finies

Soit X une variété quasi-projective. On dit qu'un point *général* de X a une propriété $\mathcal{P}$ si l'ensemble des points qui vérifient $\mathcal{P}$ contient un ouvert dense dans X. Comme l'intersection de deux ouverts denses est dense, supposons qu'un point général de X a la propriété $\mathcal{P}$ et qu'un point général de X a la propriété $\mathcal{Q}$, alors un point général de X a les propriétés $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.
Par exemple, si $u\colon X \to Y$ est une application régulière entre deux variétés, on dit que la fibre générale de u a une propriété $\mathcal{P}$ s'il existe un ouvert U dense dans Y tel que, pour tout $y \in U$, la fibre $u^{-1}(y)$ a la propriété $\mathcal{P}$.
Rappelons qu'une application régulière dominante $u\colon X \to Y$ entre deux variétés irréductibles induit une extension de corps : $u^*\colon K(Y) \hookrightarrow K(X)$.

Théoreme B.1. *Soient X et Y deux variétés quasi-projectives irréductibles et $u\colon X \to Y$ une application régulière dominante. La fibre générale de u est finie si et seulement si u^* fait de $K(X)$ une extension finie de $K(Y)$.*
Dans ce cas, on a

- $\dim X = \dim Y$, *et*
- *le nombre de points d'une fibre générale de u est au plus $[K(X) : K(Y)]$, avec égalité si k est de caractéristique zéro.*

Corollaire B.2. *Pour toute variété irréductible X de dimension n, il existe une application régulière dominante $X \to \mathbb{P}^n$ à fibres finies.*

Démonstration. On peut supposer $X \subseteq \mathbb{P}^N$ projective. On procède par récurrence sur la codimension $c := \operatorname{codim}_{\mathbb{P}^N} X = N - n$ de X.
Si $c = 0$, c'est fini. Si $c > 0$, on choisit un point $x \in \mathbb{P}^N$ hors de X, et on projette depuis x sur un hyperplan $H \subset \mathbb{P}^N$ disjoint de x. Les fibres de la restriction $p\colon X \to H$ de la projection étant finies, le théorème ci-dessus entraîne $\dim p(X) = \dim X$, donc $\operatorname{codim}_H p(X) = c - 1$. □

Annexe C. Applications régulières et dimension

Si $u\colon X \to Y$ est une application régulière entre deux variétés quasi-projectives, pour tout point $x \in X$, on note X_x la fibre de u contenant x, c'est-à-dire $u^{-1}\big(u(x)\big)$.

Théoreme C.1. *Soient X une variété quasi-projective et $u\colon X \to \mathbb{P}^n$ une application régulière. Pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'ensemble*

$$X(r) \coloneqq \{x \in X \mid \dim_x X_x \geq r\}$$

est fermé.

Le théorème ci-dessus équivaut à dire que l'application

$$\delta\colon X \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto \dim_x X_x$$

est semi-continue supérieurement.
Si X est irréductible, on a :

$$\dim X = \dim \overline{u(X)} + \min_{x \in X} \delta(x).$$

Corollaire C.2. *Soient X une variété irréductible et $u\colon X \to \mathbb{P}^n$ une application régulière. Posons $Y \coloneqq \overline{u(X)}$.*

(1) Soit $y \in \mathbb{P}^n$. Toute composante irréductible de $u^{-1}(y)$ est de dimension au moins $\dim X - \dim Y$.

(2) Il existe un ouvert non vide $U \subseteq Y$ tel que pour tout $y \in U$, $u^{-1}(y)$ est de dimension pure $\dim X - \dim Y$.

Notons que le corollaire nous montre en particulier que l'image d'une application régulière dominante contient un ouvert dense.