Devoir Maison

Le devoir est à rendre pour le 14 octobre 2024. Il s'agit du premier exercice du partiel de 2022. Tous les résultats démontrés sur les Processus de Poisson durant le TD 1 peuvent être utilisés directement.

Exercice 1

On modélise le renouvellement d'une ampoule par un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ d'intensité λ. On note $(J_n)_{n\geq 0}$ la suite des instants de sauts du processus, avec la convention $J_0 = 0$. Ainsi, J_n est l'instant où la n-ième ampoule grille, et où l'on met en place la $(n+1)$ - ième amoule. On définit, pour tout $t \geq 0$,

$$G_t = t - J_{N_t},\ D_t = J_{N_t+1} - t,\ \text{et}\, Y_t = G_t + D_t.$$

1. Tracer une trajectoire du processus de Poisson, et indiquer sur le schéma t, J_{N_t}, J_{N_t+1} ainsi que G_t, D_t et Y_t. Comment interpréter G_t, D_t et Y_t en termes d'ampoules ?
2. Pour $0 < s \leq t$ et $u > 0$, montrer que $\{G_t < s, D_t \leq u\} = \{N_{t-s} < N_t < N_{t+u}\}$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(G_t < s, D_t \leq u)$.
3. Pour $t \geq 0$ et $u > 0$, calculer $\mathbb{P}(G_t = t, D_t \leq u)$.
4. Déterminer la loi de D_t et donner son espérance.
5. Déterminer la fonction de répartition de G_t et calculer son espérance.
6. Montrer que G_t et D_t sont indépendantes.
7. Calculer $\mathbb{E}(Y_t)$ et comparer à la durée de vie moyenne de la première ampoule.