TD 2

Exercice 1

Soit S et T deux temps d'arrêt pour une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, tels que $S \leq T$ presque sûrement. Montrer que $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

Exercice 2

Le but de cette exercice est de prouver la proposition suivante, utilisée en cours pour donner une condition nécessaire et suffisante de non-explosion d'une chaîne de Markov :

Proposition 0.1 *Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ une chaîne de Markov à temps continu sur un espace dénombrable I, de matrice de taux de sauts Q et soit ζ son temps d'explosion. Pour $i \in I$, on pose $z_i = \mathbb{E}_i(e^{-\zeta})$. Alors*

(i) Pour tout $i \in I$, $|z_i| \leq 1$;

(ii) $Qz = z$.

Par ailleurs, si $\tilde{z}$ vérifie les points (i) et (ii), alors $\tilde{z}_i \leq z_i$ pour tout $i \in I$.

1. Justifier à l'aide de la propriété de Markov forte que pour tout $i, j \in I$ tels que $\mathbb{P}_i(X_{J_1} = j) > 0$, et tout $n \geq 1$,
$$\mathbb{E}_i\left(e^{-(J_{n+1}-J_n)} \,\middle|\, X_{J_1} = j\right) = \mathbb{E}_j\left(e^{-J_n}\right).$$
2. En déduire que pour tout $i, j \in I$ et $n \geq 0$,
$$\mathbb{E}_i\left(e^{-J_{n+1}}\right) = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{1+q_i}\mathbb{E}_k\left(e^{-J_n}\right).$$
3. Rappelon que pour tout $i \in I$, $q_i = \sum_{k\neq i} q_{ik} < +\infty$. En déduire grâce à la question précédente que
$$\mathbb{E}_i\left(e^{-\zeta}\right) = \sum_{k\neq i} \frac{q_{ik}}{1+q_i}\mathbb{E}_k\left(e^{-\zeta}\right),$$
puis que $Qz = z$.
4. Montrer par récurrence que si $\tilde{z}$ vérifie (i) et (ii), alors pour tout $n \geq 0$,
$$\tilde{z}_i \leq \mathbb{E}_i\left(e^{-J_n}\right)$$
5. Conclure.

Exercice 3

Un processus de naissance et mort est une chaîne de Markov à temps continu sur $\mathbb{N}$, dont les seules transitions possibles sont de i vers $i+1$ et de i vers $i-1$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note μ_i le taux de transition de i vers $i-1$ et λ_i le taux de transition de i vers $i+1$. On suppose que $\mu_0 = 0$, de sorte que le processus reste bien à valeurs dans $\mathbb{N}$. Nous supposons de plus que $\mu_n > 0$ pour tout $n \geq 1$ et $\lambda_n > 0$ pour tout $n \geq 0$. Le but de cet exercice est de montrer que le processus n'explose pas si et seulement si

$$R := \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_{k+1} \cdots \mu_n}{\lambda_k \cdots \lambda_n} = +\infty$$

1. Exprimer la matrice de taux de transitions Q du processus de naissance et mort.
2. Soit x une solution positive de $Qx = x$. Posons $\Delta_n = x_n - x_{n-1}$ pour $n \geq 1$. Exprimer Δ_{n+1} en fonction de Δ_n, x_n, λ_n et μ_n.
3. En déduire que si $x_0 = 0$, alors $x_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, puis que si $x_0 > 0$, alors la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.
4. En utilisant l'expression de Δ_{n+1} en fonction de Δ_n, x_n, λ_n et μ_n et la question précédente, montrer que si $x_0 > 0$, alors $\Delta_{n+1} \geq x_0 \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_{k+1} \cdots \mu_n}{\lambda_k \cdots \lambda_n}$. En déduire que si x est bornée, alors $R < +\infty$.
5. De même, montrer que $\Delta_{n+1} \leq x_n \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_{k+1} \cdots \mu_n}{\lambda_k \cdots \lambda_n}$ et en déduire que si $R < +\infty$, alors x est bornée.
6. Conclure.