

801 Probabilités
30h CM + 40h TD

- Chaîne de Markov à espace d'état fini ou dénombrable. Classification des états. Propriétés de Markov. Etude asymptotique : théorème de convergence en loi, théorème de convergence des moyennes ergodiques. Méthodes MCMC.
- Martingales à temps discret. Théorèmes d'arrêt. Théorèmes de convergence pour les martingales bornées dans L^2 , bornées dans L^1
- Compléments éventuels. Notions de loi d'un processus à temps discret, théorème de prolongement de Kolmogorov. Théorème des trois séries. Notion d'équi-intégrabilité. Introduction aux grandes déviations...

802 Mathématiques en anglais

20h CM

Cet UE consiste en un enseignement de mathématiques en anglais. Il pourra s'agir d'un cours et d'exercices en anglais, de la lecture d'un chapitre de livre en anglais ou d'articles (*The American Mathematical Monthly* par exemple), d'exposés réalisés par les étudiants, etc. Les thématiques abordées devront être accessibles à tout le public du master de mathématiques.

803 Travaux encadrés de recherche

Encadré par un enseignant-chercheur, l'étudiant étudie en profondeur un texte mathématique et en détaille tous les points. Il pourra s'agir d'un extrait de livre, voire d'un article de recherche accessible à ce niveau. Un travail de modélisation avec outils informatiques pourra éventuellement être demandé.

Ce travail fera l'objet d'un mémoire écrit et d'une soutenance devant un jury.

804 Spécialisation en mathématiques
(4 EC à choisir parmi 8)

EC1 : Algèbre et arithmétique 1

15h CM + 15h TD

- 1) Compléments sur la théorie des ensembles : Système inductif, Lemme de Zorn. Applications : Tout espace vectoriel possède une base, Théorème de la base incomplète, Existence des supplémentaires
Idéaux maximaux, idéaux premiers, Théorème de Krull, Caractérisation des idéaux maximaux et premiers (en TD) (dans les anneaux commutatifs)
- 2) Anneaux noethériens, Quotient d'anneaux noethériens, produit cartésien d'anneaux noethériens, Théorème de la base finie de Hilbert, Relation Factoriel-noethérien
- 3) Généralités sur les modules, morphismes de modules, sous-modules ; modules quotient, suites exactes de modules, familles génératrices, familles libres, module libre, invariance du rang si l'anneau de base est commutatif, contre-exemple (en TD), modules libres sur un anneau intègre
- 4) Extensions de corps, Extensions algébriques, Corps de ruptures, Corps de décomposition,
- 5) Si le temps le permet : Clôtures algébriques, Construction à la règle et au compas, nombres constructibles.

EC2 : Algèbre et arithmétique 2

15h CM + 15h TD

- 5) Modules noethériens, modules noethériens sur un anneau noethérien, sous-modules, module produit et quotient de modules noethériens
- 6) Modules sur un anneau principal : modules de type fini sur un anneau principal, modules libres, sous-modules d'un module libre, Torsion d'un module, Un module est libre si et seulement s'il est sans torsion et de type fini, théorème de structure pour les modules de type fini ; Théorème de la base subordonnée, la suite des diviseurs élémentaires
- 7) Applications aux groupes abéliens, et groupes abéliens fini, classification par la suite des diviseurs élémentaires. Si le temps le permet : application à la réduction des endomorphismes, jordanisation

EC3 : Analyse fonctionnelle 1

15h CM + 15h TD

- Théorème de Baire, théorème de l'application ouverte, théorème du graphe fermé, théorème de Banach-Steinhaus
- Théorème de Hahn-Banach et conséquences géométriques (théorème de séparation des convexes)
- Théorème d'Ascoli

EC4 : Analyse fonctionnelle 2

15h CM + 15h TD

- Rappels de topologie générale
- Complétion des espaces vectoriels par les suites de Cauchy (et construction des réels).
- Espaces semi-normés
- Retour sur les distributions

EC5 : Calcul scientifique 1 : bases mathématiques du calcul scientifique

22h CM + 8h TD

Le but de cet EC est de donner les bases mathématiques des méthodes numériques en équations aux dérivées partielles spatiales. Le programme exact dépend du choix retenu par l'enseignant pour l'EC Calcul scientifique 2. Ce choix peut dépendre de l'année universitaire. Il peut également dépendre du site (Nancy : M2-IMSD ou Metz : M2-PSA). L'enseignant peut choisir selon les années différentes méthodes numériques et contextes applicatifs pour son cours. Voici les programmes pour :

A : méthodes des éléments finis. B : méthode spectrale. C : méthode des volumes finis.

A- Méthodes des éléments finis

Espaces de Sobolev. Formulations variationnelles. Existence et unicité de solution variationnelle de problèmes aux limites,

Considérations avec conditions aux limites de type Dirichlet ainsi que de type Neumann homogène, Éléments finis de Lagrange d'ordre k en 1D ainsi qu'en 2D (éléments géométriques triangulaires et rectangulaires). Triangulation de domaines polygonaux.

Formulations variationnelles discrètes. Etude de l'erreur d'approximation.

B- Méthodes spectrales

Espaces de Sobolev. Formulations variationnelles. Existence et unicité de solutions variationnelles de problèmes aux limites.

Exemples. Polynômes orthogonaux. Formules de quadrature. Etude de l'erreur d'interpolation. Cas de la dimension 1 et 2.

Discrétisation spectrale du problème de Laplace.

C- Méthodes des volumes finis

a - Equations de transport linéaire. Méthodes des caractéristiques. Existence et unicité des solutions faibles des équations de transport linéaires. Loi de conservation scalaire, équation de Burgers.

Solutions choc, détente, raréfaction. Notion de solution entropique.

Exemples de construction de solutions faibles entropique. Problème de Riemann. Applications : équations du trafic, lois de conservation avec dissipation, équations intervenant en finance, équations de la dynamique des gaz en dimension 1 d'espace, équations de Kuramoto-Sivashinsky.

b- Grille volumes finis. Flux numérique. Schéma de Godunov. Schéma MUSCL de van Leer. Schémas volumes finis TVD. Principe du maximum discret. Ordre de précision pour un schéma volumes finis. Théorème d'équivalence de Lax-Richtmyer. Principe des volumes finis en 2D.

EC6 - Calcul Scientifique 2 : algorithmes et implémentation

8h CM + 12h TD + 10h TP

Le programme de cet EC correspond aux choix retenus par l'enseignant pour l'EC Calcul scientifique 1. Il peut donc varier selon les années et les sites en fonction des contraintes.

A- Méthode des éléments finis

Implémentation de la méthode des éléments finis. Algorithme et principe de l'assemblage de la matrice de masse et du second membre. Types de stockages de matrices. Analyse des résultats numériques.

B- Méthode spectrale

Implémentation de la méthode spectrale sur des exemples. Projet personnel. En fonction du temps disponible, d'autres points pourront être abordés tels que : traitement des frontières courbes, mise en œuvre de postprocessing, cas de domaines axisymétriques, principe de la décomposition de domaines.

C- Méthode des volumes finis

Implémentation de la méthode des volumes finis sur des exemples. Projet personnel. En fonction du temps disponible, on pourra aborder des questions simples de dynamique des gaz en dimension 1 : tubes à choc, comparaison de flux numériques sur des exemples, schémas en temps implicites.

EC7 : Optimisation 2

12h CM + 8h TD + 10h TP

1. Programmation linéaire – Aspects théoriques, méthode du simplexe.
2. Dualité en programmation linéaire.
3. Programmation quadratique.
4. Programmation en nombres entiers.
5. Aspects algorithmiques et numériques.

EC8 : Théorie des graphes et des réseaux de neurones
10h CM + 10h TD + 10h TP

A-Théorie des graphes

- matrice d'adjacence, matrice laplacienne,
- distance de graphe,
- graphes p-partis,
- arbres,
- coloriage de graphes,
- graphes expandeurs,
- mesures de connectivité.

B- Réseaux de neurones

- Définition, exemples.
- Apprentissage supervisé : descente de gradient et "backpropagation".
- Coût d'une architecture de réseaux de neurones (connectivité et expandeurs)
- Graph Neural Networks

805 Géométrie
30h CM + 30h TD

Sous-variétés de \mathbb{R}^n

- théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites (rappels, applications)
- descriptions différentes des sous-variétés de \mathbb{R}^n
- espaces tangents : approches différentes, position par rapport au plan tangent
- extrema liés, multiplicateurs de Lagrange
- métrique riemannienne (induite par la métrique plate de \mathbb{R}^n)

• Surfaces dans \mathbb{R}^3

- exemples classiques
- formes fondamentales, courbures
- champs de vecteurs, dérivée covariante, connexion de Levi-Civita
- géodésiques

Si le temps le permet :

- courbure riemannienne
- Theorema egregium de Gauss
- théorème de Gauss-Bonnet local (à bord)
- caractéristique d'Euler, théorème de Gauss-Bonnet global

• Notion de variété abstraite. Exemples.

Bibliographie :

Christian Baer, Elementary differential geometry

Manfredo do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces

Marc Troyanov, Cours de Géométrie, chapitre 7

806 Statistique

EC1 : Statistique inférentielle

7h CM + 7h TD + 6h TP

Tests non paramétriques usuels (test exact de Fischer, loi binomiale, Wilcoxon, ..). Modèle linéaire multiple dans le cas gaussien et ANOVA. Tests sur les coefficients, premiers critères de validation de modèles. Mise en oeuvre logicielle et sur des données réelles.

EC2 : Analyse de données

7h CM + 7h TD + 6h TP

Principe des méthodes factorielles, Analyse en Composantes Principales, Analyse des correspondances multiples. Introduction à la classification. Mise en oeuvre logicielle et sur des données réelles.

EC3 : Modélisation

7h CM + 7h TD + 6h TP

Introduction à l'inférence bayésienne, modèle statistique, estimateurs et tests bayésiens. Calcul par simulation, méthodes Monte Carlo Markov Chains, importance sampling. Mise en oeuvre logicielle et sur des données réelles.

807 Stage facultatif (UE facultative)

Stage dans une entreprise, une administration ou un laboratoire d'une durée inférieure à 4 mois.