TD 1

Exercice 1 :

1. Puisque $S_n \sim \mathcal{E}(\lambda_n)$, on a $\mathbb{E}[S_n] = \frac{1}{\lambda_n}$.

Comme $S_n \geq 0$ p.s, par convergence monotone (ou Fubini-Tonelli), on a

$$\boxed{\mathbb{E}\Big[\sum_{n\geq 1} S_n\Big] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[S_n] = \sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1}}.$$

2. En particulier, si $\sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1} < +\infty$, on a $\mathbb{E}[\sum_{n\geq 1} S_n] < +\infty$, ce qui implique que $\sum_{n\geq 1} S_n < +\infty$ p.s. (Notons que nous n'avons pas utilisé l'indépendance).

3. Si $\lambda_n = \lambda$, $\forall n \geq 1$, alors $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires iid, et $\mathbb{E}[|S_1|] = \mathbb{E}[S_1] = \lambda^{-1} < +\infty$.
On peut donc appliquer la loi forte des grands nombres

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda^{-1} \quad \text{p.s}$$

Autrement dit, presque sûrement, $\sum_{k\geq 1}^{n} S_k \sim \lambda^{-1} n$ et donc $\sum_{k=1}^{n} S_k \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ p.s.

4. Puisque $X \in [0, +\infty]$ presque sûrement, $\mathbb{E}[e^{-X}]$ est bien défini et e^{-X} est à valeurs dans $[0,1]$.
Donc $\mathbb{E}[e^{-X}] \geq 0$ et $\mathbb{E}[e^{-X}] = 0$ ssi $e^{-X} = 0$ p.s

Ainsi $\mathbb{E}[e^{-X}] = 0$ ps ssi $X = +\infty$ ps

5. On a

$$\mathbb{E}[e^{-S_n}] = \int_0^{+\infty} \lambda_n e^{-t} e^{-\lambda_n t} \, dt = \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}.$$

6. Supposons $\prod_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right) < +\infty$

Alors $\log\left(\prod_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)\right) < +\infty$

ie $\sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right) < +\infty$

En particulier, $\log\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et donc $\frac{1}{\lambda_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

On a déduit que $\log\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right) \sim \frac{1}{\lambda_n}$

et que le comportement de la série $\sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right)$ est le même que celui de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$.

donc $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty$

On a bien prouvé que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \log\left(1+\frac{1}{\lambda_n}\right) < +\infty$.

7. Posons $X = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n$ qui est à valeurs dans $[0,+\infty]$.

D'après la question 4, $X = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n = +\infty$ p-s <u>ssi</u>

$\mathbb{E}[e^{-X}] = 0$ p.s.

Or $\mathbb{E}[e^{-X}] = \mathbb{E}[e^{-\sum_{n=1}^{+\infty} S_n}]$

$= \mathbb{E}[\prod_{n=1}^{+\infty} e^{-S_n}]$

par indépendance des S_n $\longrightarrow$ $= \prod_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[e^{-S_n}]$

$= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda_n}{1+\lambda_n}$ (par la question 5)

$= \frac{1}{\prod_{n=1}^{+\infty} (1+\frac{1}{\lambda_n})}$

$= 0$ par la question 6.

On a bien prouvé que $\sum_{n\geq 1} \lambda_n^{-1} = +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(\sum_{n=1}^{+\infty} S_n = +\infty) = 1$

Exercice 2 :

1. Par définition ; $Y_n = N_{J_n}$ où J_n est le n-ième temps de saut. Puisque $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de comptage, les sauts de $(N_t)_{t\geq 0}$ sont d'amplitude 1.

Ainsi ; $Y_{n+1} = Y_n + 1$.

Donc $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une $CMTD(\delta_0, \Pi)$ où Π est la matrice de transition donnée par

$$\begin{cases} \Pi_{i,i+1} = 1 \\ \Pi_{i,j} = 0 \quad \text{si } j \neq i+1. \end{cases}$$

2.a. L'ensemble des $]s_1, t_1] \times]s_2, t_2] \times \dots \times]s_n, t_n]$ pour $0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq \dots \leq s_n < t_n$ est un Π-système qui engendre la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+^n)$. Par le lemme de classe monotone, il suffit de donner $\mathbb{P}(J_1 \in]s_1; t_1], \dots, J_n \in]s_n, t_n])$ pour donner la loi de $(J_1, \dots, J_n)$.

2.b. On pose $t_0 = 0$.

On a $J_1 \in]s_1, t_1] ; \dots ; J_n \in]s_n, t_n]$

si et seulement si il y a exactement 0 saut entre t_{i-1} et s_i pour tout $1 \leq i \leq n$; 1 saut entre s_i et t_i pour $1 \leq i \leq n-1$ et au moins 1 saut entre s_n et t_n.

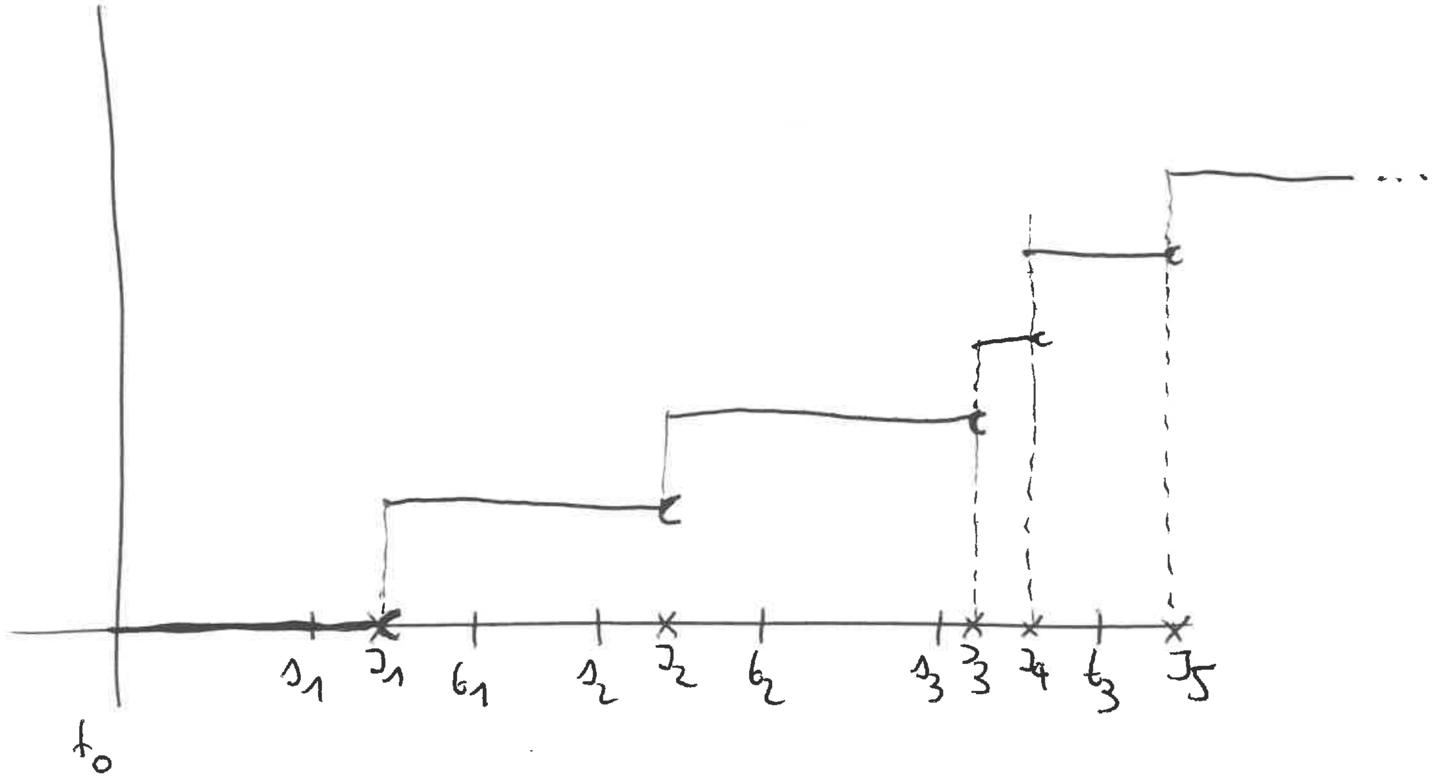

Figure avec $n=3$.

Ainsi

$$\mathbb{P}\left(T_1 \in]s_1, t_1] ; \dots ; T_n \in]s_n, t_n]\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\forall\, 1 \leq i \leq n-1,\ N_{s_i} - N_{t_{i-1}} = 0 \ ; N_{t_i} - N_{s_i} = 1 \ ; N_{s_n} - N_{t_{n-1}} = 0 ; N_{t_n} - N_{s_n} \geq 1\right)$$

Or les accroissements de $(N_t)_{t\geq 0}$ étant indépendants, l'évènement ci-dessus a une probabilité donnée par

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_{s_i} - N_{t_{i-1}} = 0) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(N_{t_i} - N_{s_i} = 1)\ \mathbb{P}(N_{t_n} - N_{s_n} \geq 1).$$

Par ailleurs : $\forall\, 1 \leq i \leq n,\ N_{s_i} - N_{t_{i-1}}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(s_i - t_{i-1})$

si bien que

$$\mathbb{P}(N_{s_i} - N_{t_{i-1}} = 0) = e^{-\lambda(s_i - t_{i-1})}$$

De même,

$$\mathbb{P}(N_{t_i} - N_{s_i} = 1) = \lambda(t_i - s_i)e^{-\lambda(t_i - s_i)}$$

Et

$$\mathbb{P}(N_{t_n} - N_{s_n} \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N_{t_n} - N_{s_n} = 0)$$
$$= 1 - e^{-\lambda(t_n - s_n)}.$$

Ainsi :

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_{s_i} - N_{t_{i-1}} = 0) \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(N_{t_i} - N_{s_i} = 1) \; \mathbb{P}(N_{t_n} - N_{s_n} \geq 1)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda(s_i - t_{i-1})} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda(t_i - s_i)e^{-\lambda(t_i - s_i)} \left(1 - e^{-\lambda(t_n - s_n)}\right)$$

$$= \lambda^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (t_i - s_i) \, e^{-\lambda s_n} \left(1 - e^{-\lambda(t_n - s_n)}\right)$$

$$= \lambda^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} (t_i - s_i) \left(e^{-\lambda s_n} - e^{-\lambda t_n}\right).$$

Or :

$$\int_{]s_1;t_1] \times \dots \times]s_n,t_n]} \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathbb{1}_{0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_n} du_1 \dots du_n$$

$$= \lambda^{n-1} \left(\int_{]s_1,t_1]} du_1\right) \times \dots \times \left(\int_{]s_{n-1},t_{n-1}]} du_{n-1}\right) \left(\int_{]s_n,t_n]} \lambda e^{-\lambda u_n} du_n\right)$$

6

et donc

$$\int_{]s_1,t_1]\times\dots\times]s_n,t_n]} \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathbb{1}_{0<u_1<\dots<u_n}\, du_1\dots du_n = \lambda^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}(t_i-s_i)\left(e^{-\lambda s_n}-e^{-\lambda t_n}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left((T_1,\dots,T_n)\in]s_1,t_1]\times\dots\times]s_n,t_n]\right)$$

et nous avons prouvé que la densité est donnée par

$$\underline{(u_1,\dots,u_n)\longmapsto \lambda^n e^{-\lambda u_n}\mathbb{1}_{0<u_1<\dots<u_n}}.$$

3. Rappelons que $S_1=T_1$, $S_2=T_1+T_2$; ..., $S_n=T_1+\dots+T_n$.

On a donc, pour toute fonction $f:\mathbb{R}_+^n\to\mathbb{R}$ mesurable et bornée:

$$\mathbb{E}[f(S_1,\dots,S_n)] = \mathbb{E}[f(T_1,T_1+T_2,\dots,T_1+\dots+T_n)]$$

question 2 $\longrightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}_+^n} f(u_1, u_1+u_2,\dots,u_1+\dots+u_n)\,du_1\dots du_n \times \lambda^n e^{-\lambda u_n}\mathbb{1}_{0<u_1<\dots<u_n}$$

On utilise le changement de variables

$$(u_1,u_1+u_2,\dots,u_1+\dots+u_n) \Longrightarrow (s_1,s_2,\dots,s_n)$$

pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} f(u_1, u_1+u_2, \ldots, u_1+\ldots+u_n)\, \lambda^n e^{-\lambda u_n} \mathbb{1}_{0<u_1<\ldots<u_n}\, du_1 \ldots du_n$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^n} f(s_1, \ldots, s_n)\, \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n s_i}\, ds_1 \ldots ds_n$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[f(S_1, \ldots, S_n)] = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(s_1, \ldots, s_n)\, \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n s_i}\, ds_1 \ldots ds_n$$

On en déduit que la densité de $(S_1, \ldots, S_n)$ est

$$(s_1, \ldots, s_n) \longrightarrow \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n s_i} = \prod_{i=1}^n \left(\lambda e^{-\lambda s_i}\right)$$

qui est la densité d'un vecteur composé de n Variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Nous en déduisons donc que les temps d'attente sont indépendants, distribués selon des exponentielles de paramètre λ.

Ainsi, $(N_t)_{t\geq 0}$ est une CMTC, de matrice d'intensité

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \\ \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

4. Rappelons que N_t explose si $\sum_{n=1}^{+\infty} S_n < +\infty$ p.s.

Or $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite de va iid de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

D'après l'exercice 1, $\mathbb{P}(\sum_{n=1}^{+\infty} S_n = +\infty) = 1$

et donc le processus de Poisson n'explose pas.

Exercice 3 :

Soit $t > 0$ et $u \leq t$.

$$\mathbb{P}(J_1 \leq u \mid N_t = 1) = \frac{\mathbb{P}(J_1 \leq u ; N_t = 1)}{\mathbb{P}(N_t = 1)}$$

On a $\mathbb{P}(N_t = 1) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

Par ailleurs, $\{J_1 \leq u ; N_t = 1\} = \{N_u = 1 ; N_t = 1\}$

$$= \{N_t - N_u = 0 ; N_u = 1\}.$$

Par l'indépendance des accroissements,

$$\mathbb{P}(J_1 \leq u, N_t = 1) = \mathbb{P}(N_u = 1 ; N_t - N_u = 0)$$

$$= \mathbb{P}(N_u = 1)\,\mathbb{P}(N_t - N_u = 0)$$

$$= \lambda u e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)}$$

$$= \lambda u e^{-\lambda t}.$$

Et donc $\boxed{\mathbb{P}(J_1 \leq u \mid N_t = 1) = \frac{u}{t} \; ; \; \forall\, 0 \leq u \leq t.}$

9

On en déduit que conditionnellement à $N_t = 1$; T_1 suit une loi uniforme sur $[0, t]$.

Exercice 4 : Commençons par donner la densité de la statistique d'ordre. Soit $(U_1, \dots, U_n)$ des va iid, de loi uniforme sur $[0,t]$ et posons $U_{(1)}, \dots, U_{(n)}$ les U_i rangés par ordre croissant (i.e $U_{(1)} < U_{(2)} < \dots < U_{(n)}$). Notons que l'inégalité est stricte par indépendance des U_i et le fait que les U_i possèdent une densité.

Soit f une fonction mesurable bornée ; alors

$$\mathbb{E}[f(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})] = \mathbb{E}\Big[\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)}) \mathbb{1}_{U_{\sigma(1)} < \dots < U_{\sigma(n)}}\Big]$$

où $\mathfrak{S}_n$ représente l'ensemble des permutations de $[\![1, \dots n]\!]$.

Or $(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)})$ a la même loi que $(U_1, \dots, U_n)$ est donc

$$\mathbb{E}[f(U_{\sigma(1)}, \dots, U_{\sigma(n)}) \mathbb{1}_{U_{\sigma(1)} < \dots < U_{\sigma(n)}}]$$

$$= \mathbb{E}[f(U_1, \dots, U_n) \mathbb{1}_{U_1 < \dots < U_n}]$$

$$= \frac{1}{t^n} \int f(u_1, \dots, u_n) \mathbb{1}_{0 \leq u_1 < \dots < u_n \leq t} \, du_1 \dots du_n .$$

Puisque $|\mathfrak{S}_n| = n!$; cela donne

$$\boxed{\mathbb{E}[f(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})] = \frac{n!}{t^n} \int f(u_1, \dots, u_n) \mathbb{1}_{0 \leq u_1 < \dots < u_n \leq t} \, du_1 \dots du_n}$$

autrement dit, la densité de $(U_{(1)}, \dots, U_{(n)})$ est

$$(u_1, \dots, u_n) \longmapsto \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{0 \le u_1 < \dots < u_n \le t}.$$

Notons maintenant que $\{N_t = n\} = \{J_n \le t < J_{n+1}\}$; si bien que

$$\mathbb{E}[f(J_1, \dots, J_n) \mathbb{1}_{N_t = n}] = \mathbb{E}[f(J_1, \dots, J_n) \mathbb{1}_{J_n \le t < J_{n+1}}]$$

$$= \int f(u_1, \dots, u_n) \lambda^{n+1} e^{-\lambda u_{n+1}} \mathbb{1}_{0 \le u_1 < \dots < u_n \le t < u_{n+1}} du_1 \dots du_n du_{n+1}$$

où l'on a utilisé la question 2 de l'exercice 2 (avec $n+1$ au lieu de n)

Finalement : $\mathbb{E}[f(J_1, \dots, J_n) \mathbb{1}_{N_t = n}] = \lambda^n e^{-\lambda t} \int f(u_1, \dots, u_n) \mathbb{1}_{0 \le u_1 < \dots < u_n \le t} du_1 \dots du_n$

Et comme $\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$;

On en déduit

$$\boxed{\mathbb{E}[f(J_1, \dots, J_n) | N_t = n) = \frac{n!}{t^n} \int f(u_1, \dots, u_n) \mathbb{1}_{0 \le u_1 < \dots < u_n \le t} du_1 \dots du_n}$$

Ce qui prouve que $(J_1, \dots, J_n)$ conditionnellement à $N_t = n$ a la même loi que la statistique d'ordre.

Exercice 5 :

- Commençons par montrer que $P_t = N_t + M_t$ est un processus de comptage. Les trajectoires $t \longmapsto P_t(\omega)$ sont bien croissantes et continues à droite. Il reste à vérifier que presque sûrement, les sauts sont d'amplitude 1.

Il est clair que P_t a un saut d'amplitude 2 si et seulement si N_t et M_t sautent au même moment.

Notons $(J_n^N)_{n\geq 1}$ et $(J_n^M)_{n\geq 1}$ les suites de temps de saut de $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$, respectivement.

Alors $\mathbb{P}(\exists n, m \geq 1 / J_n^N = J_m^M) \leq \sum_{n,m} \mathbb{P}(J_n^N = J_m^M)$.

Comme $(N_t)_{t\geq 0}$ et $(M_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants, et que J_n^N et J_m^M ont une densité, on en déduit que $\mathbb{P}(J_n^N = J_m^M) = 0$, et donc $\mathbb{P}(\exists n, m \geq 1 / J_n^N = J_m^M) = 0$.

Cela prouve que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un processus de comptage.

- $(P_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants :

$$P_{t+s} - P_t = (N_{t+s} - N_t) + (M_{t+s} - M_t).$$

Or $N_{t+s} - N_t$ est indépendant de $\sigma((N_u)_{u\leq t})$

$M_{t+s} - M_t$ ——— $\sigma((M_u)_{u\leq t})$

Également : $N_{t+s} - N_t$ ——— $\sigma((M_u)_{u\leq t})$ (car N et M sont indépendants)

$M_{t+s} - M_t$ ——— $\sigma((N_u)_{u\leq t})$

Cela prouve que

$(N_{t+s} - N_t ; M_{t+s} - M_t)$ est indépendant de

$\sigma((N_u)_{u \leq t} ; (M_u)_{u \leq t})$

Or $\sigma((P_u)_{u \leq t}) \subset \sigma((N_u)_{u \leq t} ; (M_u)_{u \leq t})$

et donc

$(N_{t+s} - N_t ; M_{t+s} - M_t)$ est indépendant de $\sigma((P_u)_{u \leq t})$

et $P_{t+s} - P_t$ est indépendant de $\sigma((P_u)_{u \leq t})$.

- Accroissements stationnaires et poissoniens

$$P_{t+s} - P_t = N_{t+s} - N_t + M_{t+s} - M_t$$

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mesurable bornée.

$$\mathbb{E}[f(P_{t+s} - P_t)] = \sum_{n,m \geq 0} f(n+m)\, \mathbb{P}((N_{t+s} - N_t) = n ; (M_{t+s} - M_t) = m)$$

indépendance de N et M $\to$ $$= \sum_{n,m \geq 0} f(n+m)\, \mathbb{P}(N_{t+s} - N_t = n)\, \mathbb{P}(M_{t+s} - M_t = m)$$

stationnarité $\to$ $$= \sum_{n,m \geq 0} f(n+m)\, \mathbb{P}(N_s = n)\, \mathbb{P}(M_s = m)$$

loi de Poisson $\to$ $$= \sum_{n,m \geq 0} f(n+m)\, e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^n}{n!} \frac{(\mu s)^m}{m!} e^{-\mu s}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)s} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \underbrace{\sum_{l=0}^{k} \frac{(\lambda s)^l}{l!} \frac{(\mu s)^{k-l}}{(k-l)!}}_{= (k!)^{-1} \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} \frac{(\lambda s)^l}{l!} \frac{(\mu s)^{k-l}}{(k-l)!}}$$

13

et donc

$$\mathbb{E}[f(P_{t+s} - P_t)] = e^{-(\lambda+\mu)s} \sum_{k=0}^{+\infty} f(k) \frac{((\lambda+\mu)s)^k}{k!}$$

Ce qui prouve que $P_{t+s} - P_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda+\mu)s$.

En prenant $t=0$; P_s suit une loi de Poisson de paramètre $(\lambda+\mu)s$, comme $P_{t+s} - P_t$.

Donc $(P_t)_{t\geq 0}$ est bien un Processus de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

Exercice 6 :

1. Si X suit une loi de Poisson de paramètre μ ; alors

Soit $s \in \mathbb{R}$; $\mathbb{E}[e^{sX}] = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} e^{sn}$

$$= e^{-\mu} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mu e^{s})^n}{n!} = e^{-\mu} e^{\mu e^{s}} = \boxed{e^{\mu(e^{s}-1)}}.$$

2. $f_u(t+s) = \mathbb{E}[e^{uN_{t+s}}]$

$$= \mathbb{E}[e^{u(N_{t+s} - N_s)} e^{uN_s}]$$

accroissements indépendants et stationnaires $\to$ $= \mathbb{E}[e^{uN_t}]\,\mathbb{E}[e^{uN_s}]$

$= f_u(t)\, f_u(s)$. $\to$ $\boxed{f_u(t+s) = f(t) f(s)}$

14

3. Soit μ

Presque sûrement ; $t \longmapsto N_t$ est croissante, donc

$t \longmapsto e^{\mu N_t}$ est décroissante et

$t \longmapsto \mathbb{E}[e^{\mu N_t}] = f_\mu(t)$ est décroissante.

~~f_μ est identiquement nulle si et seulement si ;~~

~~$\forall t \geq 0 ; \quad \mathbb{E}[e^{\mu N_t}] = 0$~~

~~c'est-à-dire si $\forall t \geq 0 ;$ N~~

Comme $N_t \geq 0$ presque sûrement ; $\mathbb{E}[e^{\mu N_t}] \leq 1$

et donc $f_\mu(t) \leq 1$.

Comme dans le cours, l'équation $f_\mu(t+s) = f_\mu(t) f_\mu(s)$ et la monotonie de f nous permet de montrer que il existe $c(\mu) \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \geq 0 ;$ $\boxed{f_\mu(t) = e^{c(\mu) t}}$

4. Soit $t > 0$; et $n \geq 0$.

Alors sur l'événement $\{N_{nt} = 0, N_{(n+1)t} \geq 2\}$, on sait que le premier temps de saut J_1 est plus grand strictement que nt (car $N_{nt} = 0$) et que le deuxième temps de saut J_2 est inférieur ou égal à $(n+1)$ (car $N_{(n+1)t} \geq 2$).

Donc $$nt < J_1 < J_2 \leq (n+1)t$$

et ainsi $$J_2 < J_1 + t.$$

On en déduit que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{N_{nt} = 0 ; N_{(n+1)t} \geq 2\} \subset \{J_2 < J_1 + t\}$

Maintenant,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0} \{ N_{nt} = 0, \ N_{(n+1)t} \geq 2 \} \Big)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(N_{nt} = 0, N_{(n+1)t} \geq 2)$$

car les événements sont disjoints.

Par ailleurs, grâce à l'indépendance et la stationarité des accroissements, on a

$$\mathbb{P}(N_{nt} = 0 \ , \ N_{(n+1)t} \geq 2) = \mathbb{P}(N_{(n+1)t} - N_{nt} \geq 2 ; N_{nt} = 0)$$

$$= \mathbb{P}(N_t \geq 2) \ \mathbb{P}(N_{nt} = 0)$$

De plus, $\mathbb{P}(N_{nt} = 0) = \mathbb{P}(N_{nt} - N_{(n-1)t} = 0, \ N_{(n-1)t} = 0)$

$$= \mathbb{P}(N_t = 0) \ \mathbb{P}(N_{(n-1)t} = 0)$$

Si bien que $\mathbb{P}(N_{nt} = 0) = \mathbb{P}(N_t = 0)^n$.

D'où

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq 0} \{ N_{nt} = 0 ; N_{(n+1)t} \geq 2 \} \Big) = \mathbb{P}(N_t \geq 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_t = 0)^n$$

$$= \mathbb{P}(N_t \geq 2) \ \frac{1}{1 - \mathbb{P}(N_t = 0)}$$

et finalement, $\mathbb{P}(N_t \geq 2) \dfrac{1}{1 - \mathbb{P}(N_t = 0)} \leq \mathbb{P}(J_2 < J_1 + t)$

Nous avons donc

$$\frac{\mathbb{P}(N_t \geq 2)}{t} \leq \frac{1 - \mathbb{P}(N_t = 0)}{t} \, \mathbb{P}(J_2 < J_1 + t)$$

Comme $J_2 > J_1$ presque sûrement, on a

$$\lim_{t \to 0} \mathbb{P}(J_2 < J_1 + t) = 0.$$

~~Par ailleurs,~~ $\cancel{\mathbb{P}(N_t = 0) = f_\mu(t) - \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\mu k} \, \mathbb{P}(N_t = k)}$

$$\cancel{= 1 + c(\mu) t + o(t) - \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\mu k} \, \mathbb{P}(N_t = k)}$$

~~d'où~~ $\cancel{\frac{1 - \mathbb{P}(N_t = 0)}{t} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} e^{\mu k} \, \mathbb{P}(N_t = k) - c(\mu) + o(1)}$

Pour tout $n \geq 1$; $\mathbb{P}(N_{1/n} = 0) = \mathbb{P}(N_1 = 0)^{1/n}$

Comme $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(N_{1/n} = 0) = 1$; (par continuité à droite des trajectoires et le fait que $N_0 = 0$ ps)

on a $\mathbb{P}(N_1 = 0) > 0$.

D'où $\mathbb{P}(N_{1/n} = 0) = 1 + \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(N_1 = 0) + o(1/n)$

et $$\frac{1 - \mathbb{P}(N_{1/n} = 0)}{1/n} = - \log \mathbb{P}(N_1 = 0) + o(1)$$

Par ailleurs; $\forall t > 0$; si $1/_{n+1} \leq t < 1/_n$;

$$0 \leq \frac{1 - \mathbb{P}(N_t = 0)}{t} \leq \frac{1 - \mathbb{P}(N_{1/n} = 0)}{1/_{n+1}}$$

$$\leq \frac{n+1}{n} \; \frac{1 - \mathbb{P}(N_{1/n} = 0)}{1/n}$$

Comme $\frac{1 - \mathbb{P}(N_{1/n} = 0)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\log \mathbb{P}(N_1 = 0) := \mu$

et $\frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

On en déduit que $t \mapsto \frac{1 - \mathbb{P}(N_t = 0)}{t}$ est bornée.

et finalement que $\frac{1 - \mathbb{P}(N_t = 0)}{t} \mathbb{P}(J_2 < J_1 + t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$

et ainsi $\frac{1}{t} \mathbb{P}(N_t \geq 2) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

5. On a $\mathbb{P}(N_t = 0) + \mathbb{P}(N_t = 1) + \mathbb{P}(N_t \geq 2) = 1$

d'où $\lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{P}(N_t = 1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \mathbb{P}(N_t = 0)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{\mathbb{P}(N_t \geq 2)}{t}$

$= \mu$.

Par ailleurs :

$$\frac{h(t) - 1}{t} = \frac{\mathbb{P}(N_t = 0) - 1}{t} + \frac{\mathbb{P}(N_t = 1)}{t} + \sum_{k \geq 2} e^{\mu k} \mathbb{P}(N_t = k)$$

Comme $u < 0$; $\sum_{k \geq 2} e^{uk} < \infty$ et donc

$$\frac{1}{t} \sum_{k \geq 2} \mathbb{P}(N_t = k) e^{uk} \leq \frac{\mathbb{P}(N_t \geq 2)}{t} \sum_{k \geq 2} e^{uk} \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

D'où

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_u(t) - 1}{t} = -\mu + e^{u}\mu = \mu(e^{u} - 1).$$

Par ailleurs, comme $f_u(t) = e^{c(u)t}$; on a

$$\lim_{t \to 0} \frac{f_u(t) - 1}{t} = c(u)$$

et donc $c(u) = \mu(e^{u} - 1)$; i.e

$$\boxed{f_u(t) = e^{t\mu(e^{u} - 1)}}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre μt.

On en déduit que N_t suit une loi de Poisson de paramètre μt.

Exercice 7 :

1. $(N_t^A)_{t\geq 0}$, $(N_t^B)_{t\geq 0}$ des processus de Poisson de paramètre respectif 1 et 7, indépendant.

Le nombre total de bus qui passe à l'arrêt en

$N_t = N_t^A + N_t^B$, qui d'après l'exercice 5 est un processus de Poisson d'intensité $1+7=8$.

La probabilité de voir passer exactement 3 bus en une heure est donc

$$\mathbb{P}(N_1 = 3) = \frac{8^3}{3!}e^{-8}.$$

2. Notons $(J_n^A)_{n\geq 0}$ et $(J_n^B)_{n\geq 0}$ les temps de sauts de $(N_t^A)_{t\geq 0}$ et $(N_t^B)_{t\geq 0}$, respectivement.

Alors on cherche à calculer $\mathbb{P}(J_3^B < J_1^A < J_4^B)$.

Comme les processus sont indépendants, on a

$$\mathbb{P}(J_3^B < J_1^A < J_4^B) = \mathbb{E}\left[\mathbb{P}(J_3^B < J_1^A < J_4^B \mid (J_3^B, J_4^B))\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-J_3^B} - e^{-J_4^B}\right]$$

Question 2 ex 2 $\longrightarrow$ $$= \int (e^{-u_3} - e^{-u_4})\, 7^4 e^{-7u_4} \mathbb{1}_{0<u_1<u_2<u_3<u_4} du_1 \dots du_4$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_{u_1}^{+\infty}\int_{u_2}^{+\infty} e^{-u_3}\int_{u_3}^{+\infty} 7^4 e^{-7u_4} du_1 \dots du_4 - \int_0^{\infty}\int_{u_1}^{\infty}\int_{u_2}^{\infty}\int_{u_3}^{\infty} 7^4 e^{-8u_4} du_1 \dots du_4$$

$$= \left(\frac{7}{8}\right)^3 - \left(\frac{7}{8}\right)^4 = \left(\frac{7}{8}\right)^3 \frac{1}{8}.$$

20

Exercice 8 :

1. La suite des temps d'attente $(S_n)_{n\geq 1}$ est indépendante;

et $S_n \sim \mathcal{E}(q_n)$.

D'après l'exercice 1; si $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n^{-1} = +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n = +\infty\right) = 1$

et donc il n'y a pas explosion.

Si au contraire $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n^{-1} < +\infty$, alors $\mathbb{P}\left(\sum_{n=1}^{\infty} S_n < +\infty\right) = 1$

et il y a explosion.

2. Il suffit de prendre $q_n = n^2$ pour qu'il y ait explosion;

ou même $q_n = n^{1+\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$.