Examen partiel

Les notes de cours et de TD sont autorisées. L'examen dure 2h, et le sujet est volontairement trop long.

Exercice 1 (4,5 pts)

Pour un $\alpha, \beta \geq 0$, on considère la matrice Q donnée par

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\beta & \frac{1}{2} & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (0,25 pt) Que doit valoir β pour que Q soit une matrice d'intensité ? **On fixe cette valeur de β dans la suite de l'exercice**.

   Pour que la matrice Q soit une matrice d'intensité, il faut et il suffit que la somme des éléments sur la troisième ligne soit égale à 0. Cela donne la condition $\beta = 1+\alpha$.

2. (0,25 pt) Donner la matrice π de transition associée à Q.

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2(1+\alpha)} & 0 & 0 & \frac{1}{2(1+\alpha)} & \frac{\alpha}{1+\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. (0,5 pt) Donner les classes de communication de Q. Expliquer rapidement quelles sont les classes récurrentes, et quelles sont les classes transientes.

   En regardant π, on voit facilement que les états $\{4\}$ et $\{5\}$ sont absorbants, donc forment chacun une classe récurrente. On voit également que les états $\{1,2,3\}$ communiquent et forment également une classe. Cette classe est transiente, puisque les états 2 et 3 mènent à 4 (et 5 également pour 3), qui sont absorbants.

4. (3 pts) Soit $(X_t)_{t\geq}$ une chaîne de Markov à temps continu, de matrice d'intensité Q, et telle que $X_0 = 1$. Calculer, en fonction de α, la probabilité pour $(X_t)_{t\geq 0}$ d'atteindre l'état 4 en temps fini. Donner les limites quand α tend vers 0 et α tend vers l'infini de cette probabilité, ainsi que sa monotonie en fonction de α. Cela vous semble - t- il intuitif ?

   Pour $1 \leq i \leq 5$, on note $h_i = \mathbb{P}_i(T_4 < +\infty)$, où T_4 est le temps d'atteinte de 4. On cherche donc à calculer h_1. On sait que $(h_i, i \in \{1,\dots,5\})$ est la solution minimale positive de

$$\begin{cases} h_4 = 1 \\ \sum_{j\in I} q_{i,j} h_j = 0. \quad i \neq 4. \end{cases}$$

Par ailleurs, l'état 5 étant absorbant, on a $h_5 = 0$. On a donc, en utilisant $h_4 = 1$ et $h_5 = 0$, le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -4h_1 + 2h_2 + 2h_3 = 0 \\ h_1 - 2h_2 + 1 = 0 \\ \frac{1}{2}h_1 - (1+\alpha)h_3 + \frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

qui donne

$$\begin{cases} 4h_1 - 2h_2 - 2h_3 = 0 \\ 2h_2 = h_1 + 1 \\ 2h_3 = \frac{1}{(1+\alpha)}(h_1 + 1) \end{cases}$$

d'où

$$4h_1 - (h_1 + 1) - \frac{1}{(1+\alpha)}(h_1 + 1) = 0$$

qui implique (en notant $h_1(\alpha)$ pour souligner la dépendance en α)

$$h_1(\alpha) = \frac{2+\alpha}{2+3\alpha}$$

On voit que

$$h_1(0) = 1, \quad \lim_{\alpha\to\infty} h_1(\alpha) = \frac{1}{3}, \quad h_1'(\alpha) < 0$$

Le résultat est intuitif : lorsque $\alpha = 0$, partant de 1, il n'est pas possible d'atteindre l'état 5, et donc on va finir par atteindre l'état 4 en temps fini. Lorsque α augmente, on augmente le taux de transition (et donc la probabilité de transition) de 3 vers 5, donc il est intuitif que la probabilité d'atteindre 4 décroisse. Enfin, lorsque α tend vers l'infini, on remarque en regardant π que la probabilité d'aller de 3 vers 5 tend vers 1, et donc, en partant de 1, lorsque le processus atteint 3, il va directement en 5 au prochain saut, qui a lieu presque instantanément. On pourrait faire le calcul sur la chaîne de Markov limite (avec une probabilité de transition de 3 vers 5 égale à 1) et vérifier que l'on trouve bien $\frac{1}{3}$ pour la probabilité d'atteindre 4 en temps fini.

5. (0,5 pt) Que vaut la probabilité pour X_t d'atteindre l'état 5 en temps fini ? On pourra se servir du résultat de la question précédente.

Nous avons justifié à la question 3 que partant de 1, la chaîne de Markov allait forcément atteindre 4 ou 5, et comme ce sont des états absorbants, le fait d'atteindre l'un de ces deux états exclut la possiblité d'atteindre l'autre, d'où

$$\mathbb{P}_1(T_4 < \infty) + \mathbb{P}_1(T_5 < \infty) = 1$$

et donc

$$\mathbb{P}_1(T_5 < \infty) = \frac{2\alpha}{2+3\alpha}.$$

Exercice 2 (7,5 pts)

Soit I un espace fini et Q une matrice d'intensité sur I.

1. (1 pt) Justifier qu'il existe au moins un état récurrent.

   Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu sur I, de matrice d'intensité Q et de loi initiale ν. Alors, puisque I est fini, il existe nécessairement un $i \in I$ tel que

   $$\mathbb{P}_\nu\left(\{t \geq 0 \,:\, X_t = i\} \quad \textit{n'est pas borné}\right) > 0.$$

   En particulier, $\mathbb{P}_{nu}(T_i < +\infty) > 0$, et la propriété de Markov implique que

   $$\mathbb{P}_\nu\left(\{t \geq 0 \,:\, X_t = i\}\,\textit{n'est pas borné}\right) = \mathbb{P}_\nu(T_i < +\infty)\mathbb{P}_i\left(\{t \geq 0 \,:\, X_t = i\}\,\textit{n'est pas borné}\right),$$

   et ainsi

   $$\mathbb{P}_i\left(\{t \geq 0 \,:\, X_t = i\} \quad \textit{n'est pas borné}\right) > 0.$$

   Puisque par ailleurs,chaque état est soit récurrent, soit transient, on en déduit que i est récurrent.

2. (0,25 pt) Soit i un état récurrent, fixé jusqu'à la fin de l'exercice. On suppose que $q_i > 0$. On note $T_i^+ = \inf\{t \geq J_1 \,:\, X_t = i\}$ le temps de retour en i. **On rappelle** que la mesure μ^i définie par

   $$\mu^i_j = \mathbb{E}_i\left(\int_0^{T_i^+} \mathbb{1}_{X_s=j} ds\right),\, j \in I$$

   est une mesure invariante pour Q. Justifier qu'il s'agit également d'une mesure invariante pour le semigroupe $(P(t))_{t\geq 0}$ associé à Q.

   Puisque l'espace I est fini, un théorème du cours (obtenu en dérivant les équations de Kolmogorov) nous assure qu'une mesure μ est invariante pour Q si et seulement si elle est invariante pour le semigroupe $(P(t))_{t\geq 0}$ associé à Q

3. (0,5 pt) Que vaut μ^i_i?

   Par définition de T_i^+, partant de i, pour tout $s \in [0, T_i^+[$, $X_s = i$ si et seulement si $s \leq J_1$. Ainsi,

   $$\mu^i_i = \mathbb{E}_i(J_1) = \mathbb{E}_i(S_1) = \frac{1}{q_i}$$

   puisque partant de i, le premier temps de saut J_1 est égal au premier temps d'attente S_1 et suit une loi exponentielle de paramètre q_i.

4. (0,25 pt) Soit $j \neq i$. Montrer que si i ne mène pas à j, alors $\mu^i_j = 0$.

   Si i ne mène pas à j, alors par définition, $\mathbb{P}_i(\exists s \geq 0,\, X_s = j) = 0$, et donc

   $$\mu^i_j = \mathbb{E}_i\left(\int_0^{T_i^+} \mathbb{1}_{X_s=j} ds\right) = 0.$$

5. (2 pts) Soit $j \in I$ tel que i mène à j. Justifier que j mène à i.

   Comme i est réccurent, nous avons

   $$\mathbb{P}_i\left(\{t \geq 0 :\, X_t = i\} \quad \textit{est borné}\right) = 0$$

Or, par la propriété de Markov forte appliqué au temps T_j (qui est fini presque sûrement car i mène à j), nous avons

$$\begin{aligned}0 = \mathbb{P}_i\left(\{t \geq 0 : \; X_t = i\} \quad \textit{est borné}\right) &\geq \mathbb{P}_i\left(\{t \geq 0 : \; X_t = i\} \quad \textit{est borné}; \, T_j < \infty\right) \\ &= \mathbb{P}_j\left(\{t \geq 0 : \; X_t = i\} \quad \textit{est borné}\right)\end{aligned}$$

Donc, avec probabilité 1, partant de j, $\{t \geq 0 : \; X_t = i\}$ n'est pas borné et en particulier est non vide, ce qui implique que j mène à i.

6. (1 pt) En utilisant l'invariance de μ^i pour $(P(t))_{t\geq 0}$, montrer pour tout $j \in I$ et tout $t \geq 0$,

$$\mu^i_i \geq \mu^i_j p_{j,i}(t)$$

Comme μ est invariant pour $(P(t))_{t\geq 0}$, on a pour tout $t \geq 0$,

$$\mu^i_i = \sum_j \mu^i_j p_{j,i}(t) \geq \mu^i_j p_{j,i}(t)$$

où l'on a utilisé que tous les termes de la somme sont positifs ou nuls.

7. (1,5 pts) En déduire que i est récurrent positif, et qu'il existe une distribution invariante γ^i qui charge i (c'est-à-dire telle que $\gamma^i_i > 0$).

On a

$$\begin{aligned}\sum_{j\in I} \mu^i_j &= \sum_{j\in I} \mathbb{E}_i\left(\int_0^{T_i^+} \mathbb{1}_{X_s = j} ds\right) \\ &= \mathbb{E}_i\left(\int_0^{T_i^+} \sum_{j\in I} \mathbb{1}_{X_s = j} ds\right) \\ &= \mathbb{E}_i(T_i^+)\end{aligned}$$

Or, d'après la question 4, si i ne mène pas à j, alors $\mu^i_j = 0$. Par ailleurs, d'après la question 5, si i mène à j, on a j qui mène à i, et donc pour tout $t > 0$, $p_{j,i}(t) > 0$. Grâce aux questions 3 et 6, cela implique que pour tout j tel que i mène à j,

$$\mu^i_j \leq \frac{\mu^i_i}{p_{j,i}(1)} \leq \frac{1}{q_i p_{j,i}(1)}$$

L'espace I étant fini, on a $c := \inf_{j: i \to j} p_{j,i}(1) > 0$, et donc pour tout $j \in I$,

$$\mu^i_j \leq \frac{1}{q_i c}$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}_i(T_i^+) = \sum_{j\in I} \mu^i_j \leq |I| \frac{1}{q_i c} < +\infty,$$

et cela prouve que i est récurrent positif. Par ailleurs, la distribution γ^i définie par

$$\gamma^i_j = \frac{\mu^i_j}{\mathbb{E}_i(T_i^+)}$$

est invariante, et charge i puisque $\gamma^i_i = \frac{1}{q_i \mathbb{E}_i(T_i^+)} > 0$.

8. (0,5 pt) Si $q_i = 0$, montrez qu'il existe aussi une distribution invariante qui charge i.

   Si $q_i = 0$, l'état i est absorbant, et donc la masse de dirac en i est une distribution invariante qui charge i.

9. (0,5 pt) Supposons que le cardinal de I est supérieur ou égal à 2, et que Q irréductible. Soit $j \neq i$. Justifier rapidement qu'il existe une distribution invariante γ^j qui charge j. Que peut-on dire de γ^i et γ^j ?

   Puisque Q est irréductible, tous les états sont de même nature, et donc récurrent puisque i est récurrent. Donc si $j \neq i$, j est également récurrent, et les questions précédentes implique qu'il existe une distribution invariante γ^j qui charge j. Par ailleurs, Q étant irréductible, on sait que Q admet au plus une distribution invariante, et donc $\gamma^i = \gamma^j$.

Exercice 3 (8 pts)

Des clients arrivent dans un bureau de poste selon un processus de Poisson de paramètre λ (autrement dit, le k-ième client arrive au k-ième temps de sauts du processus de Poisson). Nous supposons qu'il y a n guichets dans la poste. Lorsqu'un client arrive, si l'un des guichets est libre, il s'y rend et commence à être servi, si tous les guichets sont pris, il fait la queue. On suppose que le temps de service au guichet d'un client suit une loi exponentielle de paramètre μ, indépendante des autres guichets et du nombre de clients dans la queue. Lorsqu'un client est servi, il quitte le bureau de poste. On note X_t le nombre de clients dans la poste au temps $t \geq 0$ (ceux dans la queue et ceux en train d'être servi à un guichet)

1. (1 pt) Soit $1 \leq k \leq n$. On suppose qu'à un instant t donné, il y a k guichets occupés. Soit T le premier moment où un des guichets se libère. Quelle est la loi de T ?

   A chacun des k guichets, le temps de service suit une loi exponentielle, donc par la propriété d'absence de mémoire, on peut supposer que $t = 0$. Par ailleurs, ces lois exponentielles sont indépendantes, et donc le minimum de ces exponentielles suit également une loi exponentielle, de paramètre la somme des paramètres. Ici, toutes les exponentielles sont de paramètre μ, si bien que T suit une loi exponentielle de paramètre $k\mu$.

2. (1 pt) En déduire que $(X_t)_{t\geq 0}$ est une chaîne de Markov à temps continu, dont la matrice d'intensité est donnée par

$$\begin{cases} q_{i,i+1} = \lambda \\ q_{i,i-1} = i\mu \quad \text{si} \quad 0 \leq i \leq n \\ q_{i,i-1} = n\mu \quad \text{si} \quad i > n \\ q_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad j \neq i-1, i, i+1 \end{cases}$$

   Tous les temps d'arrivées d'un événement (arrivée d'un client, un client est servi et quitte le système) suivent des loi exponentielles et indépendantes, ce qui va donner le caractère Markovien. Par ailleurs, les seules transitions possibles sont de i vers $i+1$ (arrivée d'un client), à taux λ, et de i vers $i-1$ si $i \geq 1$: ceci correspond au départ d'un client qui a été servi. S'il y a moins de n clients, (ie, $i \leq n$), chaque client se trouve à un guichet, et le temps de service est une exponentielle de paramètre $i\mu$ d'après la question 1. S'il y a plus de n clients ($i \geq n+1$), alors n clients sont à un guichets, et les autres clients font la queue. Le départ d'un client *arrive donc à taux $n\mu$, toujours d'après la question 1. Cela donne bien la forme de Q voulue.*

3. (0,5 pt) La matrice Q est-elle irréductible ? Explosive ?
Puisque les taux de transitions de de i vers $i+1$ et de i vers $i-1$ (sauf en 0) sont positifs, la matrice est irréductible. Par ailleurs, le terme diagonal maximal est $\lambda + n\mu$, et donc Q n'est pas explosive.

4. (1pt) Montrer que si une mesure γ vérifie $\gamma_i q_{i,j} = \gamma_j q_{j,i}$, alors γ est invariante pour Q.
Soit γ une telle mesure. Alors

$$(\gamma Q)_j = \sum_i \gamma_i q_{i,j} = \sum_i \gamma_j q_{j,i} = \gamma_j \sum_i q_{j,i} = 0.$$

5. (1 pt) Déduire de la question précédente une expression d'une mesure invariante pour Q.
On cherche une mesure γ qui vérifie $\gamma_i q_{i,j} = \gamma_j q_{j,i}$. Cela donne les équations

$$\begin{cases} \lambda\gamma_0 = \mu\gamma_1 \\ \lambda\gamma_i = (i+1)\mu\gamma_{i+1};\ i < n \\ \lambda\gamma_i = n\mu\gamma_{i+1};\ i \geq n \end{cases}$$

Cela se résout par récurrence immédiate en

$$\begin{cases} \gamma_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \gamma_0;\ 0 \leq i \leq n \\ \gamma_i = \frac{1}{n^{i-n} i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \gamma_0;\ i > n \end{cases}$$

6. (1 pt) Donner une condition sur λ, μ et n pour que le processus soit récurrent positif, et donner une expression de la probabilité invariante dans ce cas.
Puisque Q est irreductible et non-explosive, nous savons que Q est récurrente positive si et seulement si elle admet une distribution stationnaire. Or, d'après les équations ci-dessous, Q admet une distribution stationnaire si et seulement si $\sum_i \gamma_i < \infty$, c'est-à-dire si et seulement si $\lambda < n\mu$. Dans ce cas, si on pose

$$\Gamma = \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i + \sum_{i \geq n+1} \frac{1}{n^{i-n} i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \right)^{-1},$$

la distribution invariante est donnée par

$$\begin{cases} \gamma_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \Gamma;\ 0 \leq i \leq n \\ \gamma_i = \frac{1}{n^{i-n} i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \Gamma;\ i > n \end{cases}$$

7. (1 pt) Calcuer, en fonction de λ, μ et n et i,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_i(X_t = 0).$$

Puisque la matrice est irréductible, on sait que pour tout i,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_i(X_t = 0) = \frac{1}{q_0 m_0},$$

où $m_0 = \mathbb{E}_0(T_0^+)$. *Or, si* Q *est récurrent nul ou transient,* $m_0 = +\infty$ *et donc*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_i(X_t = 0) = 0.$$

En revanche, si Q *est récurrent positif (ie, admet une unique distribution invariante* γ*), alors* $\frac{1}{q_0 m_0} = \gamma_0$ *et donc*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_i(X_t = 0) = \gamma_0.$$

8. (1,5 pts) On considère à présent qu'il y a une infinité de guichets ($n = +\infty$). Donner dans ce cas la matrice d'intensité Q, et l'expression d'une mesure invariante. Le processus est-il récurrent positif dans ce cas ? Si oui, que vaut sa distribution invariante ?

   Comme il y a une infinité de guichets, il n'y a pas d'effet de saturation, et chaque client qui arrive est immédiatement servi. Cela implique que lorsqu'il y a i clients dans la file, le taux de transition vers $i - 1$ *est* $i\mu$*, et ce pour tout* i*. En reprenant les calculs des questions 5 et 6, on peut facilement montrer que* Q *admet comme distribution invariante la loi de Poisson de paramètre* λ/μ*, puisque* $\Gamma = e^{-\lambda/\mu}$*. Mais cela ne suffit a priori pas à conclure pour la récurrence positive de* Q *puisque nous n'avons pas montré que* Q *est non-explosif. En effet, l'arguement donné dans la question 3 n'est pas valable ici, puisque les* q_i *ne sont plus bornés. Pour justifier la non-explosivité, il est assez facile de voir que tous les états sont récurrents pour la chaîne incluse, qui admet elle-même une unique distribution stationnaire.*