Petits coefficients de Littlewood-Richardson et GIT

Pierre-Emmanuel Chaput

15 mai 2025

Etant données trois partitions λ, μ, ν, le coefficient de Littlewood-Richardson $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ peut être défini comme la multiplicité de la représentation de Schur $S_\nu \mathbb{C}^N$ de GL_N dans le produit tensoriel $S_\lambda \mathbb{C}^N \otimes S_\mu \mathbb{C}^N$, pour N assez grand.

De manière plus géométrique, à une dualité près, ce coefficient est égal à la dimension de l'espace des invariants pour le groupe GL_N dans la représentation

$$H^0((\mathrm{GL}_N / B)^3, \mathcal{L}_\lambda \boxtimes \mathcal{L}_\mu \boxtimes \mathcal{L}_\nu),$$

où $\mathcal{L}_\alpha$ est le fibré en droites sur la variété des drapeaux complets GL_N / B dont les sections sont la représentation $S_\alpha \mathbb{C}^N$.

L'étude de ces coefficients, qui sont liés aussi aux polynômes symétriques, remonte aux années 1930. Une formule combinatoire permettant de les calculer, la règle de Littlewood-Richardson, a été formulée en 1934, mais sa preuve complète a dû attendre 1977 avec l'outil combinatoire de la correspondance de Robinson-Schensted.

Un point de vue plus récent consiste à étudier les propriétés de familles de coefficients de Littlewood-Richardson, et les relations qu'il peut exister entre plusieurs tels coefficients, plutôt que de se fixer sur un coefficient particulier. Par exemple, une conjecture de Fulton, démontrée dans [KTW04, Bel07, Res11], est le résultat suivant :

Théorème 1. *Si $c^{\nu}_{\lambda,\mu} = 1$ alors, pour des entiers p et q, nous avons*

$$c^{\nu(p,q)}_{\lambda(p,q),\mu(p,q)} = 1.$$

Dans ce Théorème, pour une partition α, $\alpha(p,q)$ est la partition obtenue en multipliant toutes les parts de α par p et en répétant chaque part q fois.

Récemment, avec Nicolas Ressayre, nous avons montré une variante de ce résultat, lorsque $c^{\nu}_{\lambda,\mu} = 2$:

Théorème 2. *Si $c^{\nu}_{\lambda,\mu} = 2$, alors, pour des entiers p et q, nous avons*

$$c^{\nu(p,q)}_{\lambda(p,q),\mu(p,q)} = \binom{p+q}{q}.$$

Le point de vue de la théorie géométrique des invariants explique assez simplement ces résultats. Dans le cas $c^{\nu}_{\lambda,\mu} = 1$, un certain quotient GIT est réduit à un point, de sorte que les espaces de sections GL_N-invariantes qu'on cherche à déterminer, et qui s'identifient aux espaces de sections des puissances d'un fibré ample sur ce quotient, sont de dimension 1.

Dans le cas $c^{\nu}_{\lambda,\mu} = 2$, ce quotient GIT est $\mathbb{P}^q$, de sorte que le coefficient binomial $\binom{p+q}{q}$ apparaît naturellement comme la dimension de $H^0(\mathbb{P}^q, \mathcal{O}(p))$.

Trois pistes sont proposées pour ce sujet de thèse :

- D'une part on pourra affaiblir l'hypothèse $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ en l'hypothèse $c^{\nu(p,1)}_{\lambda(p,1),\mu(p,1)} = \ell p + 1$ pour un certain entier ℓ. Dans ce cas, on s'attend à ce que le quotient GIT dont il est question ci-dessus soit encore $\mathbb{P}^q$, mais polarisé par $\mathcal{O}(\ell)$, ce qui conduirait à l'égalité

$$c^{\nu(p,q)}_{\lambda(p,q),\mu(p,q)} = \binom{\ell p + q}{q}.$$

- D'autre part on pourra s'intéresser aux résultats analogues concernant les variétés de carquois. Le cas $p = 1$ du Théorème 2 dans le cadre des carquois a été montré dans [She17], et on pourrait espérer que le résultat correspondant pour p et q quelconques reste valable dans le cas des variétés de carquois.
- Enfin, d'une manière plus ambitieuse, une étude géométrique fine et systématique des quotients GIT des variétés de drapeaux pourrait être conduite. Comme ces variétés sont projectives et normales entre autres propriétés générales connues, on peut s'attendre à ce que si elles admettent un fibré ample possèdant peu de sections, il soit possible de les classifier. Ceci conduirait à de nouveaux résultats dans l'esprit des résultats ci-dessus.

Références

[Bel07] Prakash Belkale, *Geometric proof of a conjecture of Fulton*, Adv. Math. **216** (2007), no. 1, 346–357 (English).

[KTW04] Allen Knutson, Terence Tao, and Christopher Woodward, *The honeycomb model of $GL_n(\mathbb{C})$ tensor products. II : Puzzles determine facets of the Littlewood-Richardson cone*, J. Am. Math. Soc. **17** (2004), no. 1, 19–48 (English).

[Res11] Nicolas Ressayre, *A short geometric proof of a conjecture of Fulton*, Enseign. Math. (2) **57** (2011), no. 1-2, 103–115 (English).

[She17] Cass Sherman, *Quiver generalization of a conjecture of King, Tollu, and Toumazet*, J. Algebra **480** (2017), 487–504 (English).