

Etablissement Université de Lorraine

École doctorale IAEM - INFORMATIQUE - AUTOMATIQUE - ELECTRONIQUE - ELECTROTECHNIQUE - MATHEMATIQUES

Spécialité Mathématiques

Unité de recherche IECL - Institut Elie Cartan de Lorraine

Encadrement de la thèse Sergey LYSENKO

Début de la thèse le 1 octobre 2025

Date limite de candidature (à 23h59) 31 mai 2025

Mots clés - Keywords

programme de Langlands géométrique, thêta-lifting, formes automorphes

geometric Langlands program, theta-lifting, automorphic forms

Description de la problématique de recherche - Project description

- 1) Construire un analogue du faisceau thêta sur le champ des fibrés metaplectiques pour une courbe projective connexe, qui est singulière. Le cas d'un courbe lisse a été fait précédemment dans mon article.
- 2) Etudier géométriquement la correspondance thêta pour la paire duale (U_n, U_m) des groupes unitaires obtenue par restriction de la représentation de Weil du groupe métaplectique. On espère montrer la fonctorialité de Langlands géométrique dans le cas non-ramifié pour cette paire. On s'attend à ce que le foncteur correspondant entre les catégories dérivées $D(Bun_{\{U_n\}})$ et $D(Bun_{\{U_m\}})$ commute aux foncteurs de Hecke.

Etudier eventuellement les généralisations pour les paires duales dans les groupes simple de type D_n, E_n en utilisant les versions géométriques de leurs représentations minimales.

- 1) Construct an analogue of the theta-sheaf on the moduli stack of metaplectic bundles on a projective connected singular curve. The case of a smooth curve has been done previously in my paper.
 - 2) Study geometrically the theta correspondence for the dual reductive pair (U_n, U_m) of unitary groups obtained by restricting the Weil representation of the metaplectic group. We hope to prove the geometric Langlands functoriality in the non-ramified case for this pair. We expect that the corresponding functors between the derived categories $D(Bun_{\{U_n\}})$ and $D(Bun_{\{U_m\}})$ commute with Hecke functors.
- Study eventually a generalization for the dual pairs in simple groups of type D_n, E_n using the geometric versions of their minimal representations.

Thématicque / Domaine / Contexte

programme de Langlands géométrique

Théorie des représentations géométriques. Mathématiques.

Programme de Langlands géométrique est l'un des domaines de recherche parmi les plus actifs dans la théorie des représentations modernes, qui unifie et révèle les connexions fondamentales entre la théorie des nombres, théorie des formes automorphes, l'analyse harmonique, théorie des représentations des groupes réductifs sur les corps locaux, la géométrie des espaces de modules des systèmes locaux etc.

Objectifs

- 1) Construire un analogue du faisceau thêta sur le champ des fibrés metaplectiques pour une courbe projective connexe, qui est singulière.

- 2) Montrer que les foncteurs de Hecke commutes aux foncteurs de theta-lifting pour la paire dual (U_n, U_m) des groupes unitaires.
Etudier les généralisations pour les correspondances thêta exceptionnelles.

Méthode

Parmi les méthodes bien établies dans la théorie des formes automorphes les correspondances thêta généralisées jouent un rôle important, ils ont été découvert dans les travaux de Gordan Savin, Wee Teck Gan, Kay Magaard, Hung Yean Loke et d'autres. Dans les travaux de S. Lysenko, une version géométrique de la correspondance thêta a été développée pour les paires duales (GL_n, GL_m), (SO_{2m}, Sp_{2n}) dans le cadre du programme de Langlands géométrique. Les correspondances thêta analogues doivent exister pour les paires duales réductives (G, H) plus générales, où en plus les groupes en question peuvent être métaplectiques (au lieu de réductifs). Par exemple, la correspondance entre SO_{2m+1} et le revêtement métaplectique de degré 2 de Sp_{2n} . L'intérêt principal de ces correspondances est qu'ils réalisent des cas particuliers de la fonctorialité de Langlands.

Résultats attendus - Expected results

- 1) Construction d'un analogue du faisceau theta sur le champ des fibrés métaplectiques pour une courbe projective connexe, qui est singulière.
- 2) Preuve de la commutation des foncteurs de Hecke avec les foncteurs de thêta-lifting pour la paire duale (U_n, U_m).

Références bibliographiques

- V. Lafforgue, S. Lysenko, Geometrizing the minimal representations of even orthogonal groups, Represent. Theory 17 (2013), 263 - 325
S. Lysenko, Geometric theta-lifting for unitary groups, available at https://lysenko.perso.math.cnrs.fr/papers/theta-lifting_unitary.pdf
S. Lysenko, Moduli of metaplectic bundles on curves and Theta-sheaves, Ann. Scient. ENS, 4 s'erie, t. 39 (2006), 415 - 466
Kay Magaard, Gordan Savin, Exceptional Theta-correspondences, math/9505209
Gordan Savin, Michael Woodbury, Matching of Hecke operators for Exceptional dual pair correspondences, arXiv:1301.4542

Précisions sur l'encadrement - Details on the thesis supervision

Rencontres régulières hebdomadaires pour suivi de l'avancement du projet de recherche par le directeur

Conditions scientifiques matérielles et financières du projet de recherche

contrat doctoral à l'Université de Lorraine

Objectifs de valorisation des travaux de recherche du doctorant : diffusion, publication et confidentialité, droit à la propriété intellectuelle,...

Publication des résultats dans les revues mathématiques, exposés aux conférences.

Collaborations envisagées

avec D. Gaitsgory (Max-Planck Institute, Bonn), G. Dhillon (UCLA, Los Angeles)

Profil et compétences recherchées - Profile and skills required

Bonne connaissance de la théorie des représentations des groupes réductifs, géométrie algébrique, théorie de la cohomologie étale.
Good knowledge in representation theory of reductive groups, algebraic geometry, theory of étale cohomology.

Institut Elie Cartan Nancy (Mathématiques)
Université de Lorraine
B.P. 239,
F-54506 Vandoeuvre-lès-Nancy Cedex,
France
e-mail : Sergey.Lysenko@univ-lorraine.fr
tel : +33 (0)3 83 68 45 71
<https://lysenko.perso.math.cnrs.fr/>

Projet de thèse

Titre : Correspondance thêta géométrique pour les paires réductives duales

Directeur de thèse : Sergey Lysenko

Programme de Langlands géométrique est l'un des domaines de recherche parmi les plus actifs dans la théorie des représentations moderne, qui unifie et révèle les connexions fondamentales entre la théorie des nombres, théorie des formes automorphes, l'analyse harmonique, théorie des représentations des groupes réductifs sur les corps locaux, la géométrie des espaces de module des systèmes locaux etc.

Parmi les méthodes bien établies dans la théorie des formes automorphes les correspondances thêta généralisées jouent un rôle important, ils ont été découvert dans les travaux de Gordan Savin, Wee Teck Gan, Kay Magaard, Hung Yean Loke et d'autres. Dans les travaux de S. Lysenko, une version géométrique de la correspondance thêta a été développée pour les paires duales $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{GL}_m), (\mathrm{SO}_{2m}, \mathrm{Sp}_{2n})$ dans le cadre du programme de Langlands géométrique. Les correspondances thêta analogues doivent exister pour les paires duales réductives (G, H) plus générales, où en plus les groupes en question peuvent être métaplectiques (au lieu de réductifs). Par exemple, la correspondance entre SO_{2m+1} et le revêtement métaplectique de degré 2 de Sp_{2n} . L'intérêt principal de ces correspondances est qu'ils réalisent des cas particuliers de la fonctorialité de Langlands.

On suggère deux problèmes.

- 1) Soit X une courbe projective connexe sur un corps algébriquement clos. Il est connu que le champ $\mathrm{Bun}_{\mathrm{Sp}_{2n}}$ est algébrique lisse. Construire la gerbe

metaplectique $\widetilde{\text{Bun}}_{\text{Sp}_{2n}} \rightarrow \text{Bun}_{\text{Sp}_{2n}}$ et le faisceau thêta sur $\widetilde{\text{Bun}}_{\text{Sp}_{2n}}$, qui soit l'analogue de ce faisceau dans le cas où X est lisse (ce dernier cas est établi dans [3]).

2) Étudier géométriquement la correspondance thêta pour la paire duale $(\mathbb{U}_n, \mathbb{U}_m)$ des groupes unitaires obtenue par restriction de la représentation de Weil de $\widetilde{\text{Sp}}_{2nm}$. La définition précise est donnée dans [2]. On espère démontrer la fonctorialité de Langlands dans le cas non-ramifié pour cette paire. On s'attend à ce que le foncteur correspondant entre les catégories dérivées $D(\text{Bun}_{\mathbb{U}_n})$ et $D(\text{Bun}_{\mathbb{U}_m})$ commute aux foncteurs de Hecke.

Nous espérons que les mêmes méthodes pourront s'appliquer à d'autres paires duales. Dans [1] on a proposé des conjectures dont le but est de construire les faisceaux automorphes correspondant aux représentations minimale pour certains groupes simples, en particulier, D_n, E_6, E_7 . Les mêmes méthodes pourraient ensuite donner des correspondances thêta géométriques pour les paires duales dans ces groupes (en particulier, celles qui apparaissent dans [4], [5]).

Références

- [1] V. Lafforgue, S. Lysenko, Geometrizing the minimal representations of even orthogonal groups, *Represent. Theory* 17 (2013), 263 - 325
- [2] S. Lysenko, Geometric theta-lifting for unitary groups, available at https://lysenko.perso.math.cnrs.fr/papers/theta-lifting_unitary.pdf
- [3] S. Lysenko, Moduli of metaplectic bundles on curves and Theta-sheaves, *Ann. Scient. ENS*, 4 série, t. 39 (2006), 415 - 466
- [4] Kay Magaard, Gordan Savin, Exceptional Theta-correspondences, [math/9505209](https://arxiv.org/abs/math/9505209)
- [5] Gordan Savin, Michael Woodbury, Matching of Hecke operators for Exceptional dual pair correspondences, arXiv :1301.4542