



Institut Élie Cartan  
de Lorraine



UNIVERSITÉ  
DE LORRAINE

Tristan Robert, maître de conférences  
Laurent Thomann, professeur  
Institut Élie Cartan de Lorraine  
Université de Lorraine, France  
Email : [tristan.robert@univ-lorraine.fr](mailto:tristan.robert@univ-lorraine.fr)  
Email : [laurent.thomann@univ-lorraine.fr](mailto:laurent.thomann@univ-lorraine.fr)

Nancy, le 25 mai 2025

## Demande de financement de thèse Université de Lorraine Avis motivé des encadrants

Voici les principaux éléments concernant notre demande de financement du sujet de « **Autour de l'équation de Gross-Pitaevskii avec conditions initiales aléatoires** » sur lequel nous souhaitons encadrer **Hongyu Zhang**.

### 1 Les encadrants

#### 1.1 Contexte scientifique

Nos travaux de recherche portent sur **l'étude d'équations aux dérivées partielles d'évolution, en présence ou non d'aléa**. Plus particulièrement, nous nous intéressons à une classe d'équations hamiltoniennes dites *dispersives*, parmi lesquelles figurent notamment l'équation des ondes et l'équation de Schrödinger.

L'un des modèles que nous étudions, l'équation de Gross-Pitaevskii, intervient en particulier dans la modélisation des **condensats de Bose-Einstein**, un état quantique de la matière qui apparaît lorsque des atomes sont refroidis à des températures proches du zéro absolu.

Si la candidature de Hongyu Zhang est retenue, il fera sa thèse au sein de l'équipe EDP de l'IECL, et son projet de thèse s'inscrira pleinement dans les axes de recherche de l'équipe, tout en resserrant les liens avec l'équipe Probabilités et Statistiques.

#### 1.2 Expérience d'encadrement

##### 1.2.1 Expérience d'encadrement de Tristan Robert

- Encadrement du stage pré-doctoral de Younes Zine (avec Tadahiro Oh, 50%) en 2019-2020. Ce stage était réalisé par Younes dans le cadre de sa 4e année à l'ENS de Rennes. Le sujet était motivé par des considérations de théorie quantique des champs, mais celui-ci apparaît également

dans la modélisation des condensats de Bose-Einstein, qui est le contexte physique du sujet de thèse décrit ci-dessous. Ce stage a donné lieu à une publication soumise [24]. Younes a ensuite effectué sa thèse sous la direction de Tadahiro Oh, et est maintenant en post-doctorat à l'EPFL sous la direction de Martin Hairer.

- Encadrement du stage de M2 d'Hugo Eulry (avec Ismaël Bailleul, 50%), en 2021. Ce stage portait sur l'étude d'une EDP elliptique non-linéaire en présence d'un potentiel aléatoire singulier, et a donné lieu à un article publié [1]. Hugo a ensuite effectué sa thèse sous la direction d'Ismaël à l'université de Brest, et la collaboration s'est poursuivie, donnant lieu à un second article soumis [16] sur un modèle d'EDP parabolique en présence d'un double aléa singulier sur le potentiel et sur un terme source. Hugo est maintenant en post-doctorat à l'ENS de Lyon sous la direction de Nikolay Tzvetkov.

- Encadrement, avec Laurent Thomann, du stage de M2 de Hongyu Zhang à l'IECL, sur le thème des EDP dispersives non-linéaires et aléatoires, qui est le thème du projet de recherche.

Tristan Robert a ainsi plusieurs expériences d'encadrement passées au niveau M2, et ce projet de thèse lui permettra de co-encadrer sa première thèse. Ceci s'inscrit dans un projet plus global de monter en compétence d'encadrement en parallèle d'une **préparation de l'habilitation à diriger des recherches**.

### 1.2.2 Expérience d'encadrement de Laurent Thomann

- Encadrement de la thèse de Victor Vilaça Da Rocha (en co-direction avec Benoît Grébert, 50%), du 1er septembre 2014 au 27 juin 2017. La thèse a été financée par une bourse du Centre Henri Lebesgue. Victor a effectué un post-doctorat de deux ans au Basque Center for Applied Mathematics (Bilbao), puis un post-doctorat de deux ans à Georgia Tech à Atlanta. Deux articles sont issus de cette thèse [33, 32] ainsi qu'un acte de colloque [34]. Victor a ensuite obtenu des résultats avec des méthodes de systèmes dynamiques [18]. Lors de ses postdoctorats, il s'est initié à de nouvelles thématiques, notamment sur des questions fines d'analyse harmonique autour de la fonction de Riemann [3, 15].

Victor Vilaça Da Rocha est maintenant professeur agrégé à l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines.

- Encadrement de la thèse de Nicolas Schaeffer (en co-direction avec Aurélien Deya, 50%) du 1er octobre 2019 au 13 juin 2022. La bourse de thèse a été obtenue grâce à un appel à projet de la région Grand Est. Nicolas Schaeffer a étudié l'existence et l'unicité de solutions pour l'équation de Schrödinger non-linéaire avec une perturbation stochastique (mouvement Brownien en temps et espace fractionnaire). Trois articles de recherches ont été issus de cette thèse [14, 25, 26].

Nicolas Schaeffer est maintenant enseignant en classe préparatoire aux grandes écoles.

- Encadrement de la thèse de Valentin Schwinte (avec Pierre Germain 30% et LT 70%), du 1er octobre 2021 au 27 juin 2024. La bourse de thèse était un financement doctoral de l'Université de Lorraine. Valentin Schwinte a étudié des propriétés dynamiques et stationnaires de l'équation des plus bas niveaux de Landau (LLL), et trois articles ont été issus de cette thèse [28, 27, 17].

Malgré une excellente thèse, Valentin Schwinte n'a pas souhaité poursuivre une carrière académique et travaille désormais dans le secteur privé.

## 2 Le candidat

Durant l'année universitaire en cours, Hongyu Zhang est inscrit en Master 2 *Mathématiques fondamentales et appliquées* à l'Université de Rennes, où il suit principalement des enseignements portant sur les équations aux dérivées partielles et leurs interactions avec les probabilités. Dès le premier semestre, comme il avait une idée très claire sur le domaine dans lequel il aimeraient faire une thèse, il nous a contacté sur les conseils de ses enseignants, Louise Gassot et Miguel Rodrigues, afin d'effectuer son stage de M2 sous notre direction. Ainsi, depuis début novembre nous avons des

échanges réguliers, qui ont débuté par des discussions informelles et des suggestions de lectures, avant d'évoluer vers la mise en place effective du stage de master 2.

Comme ses résultats l'attestent, Hongyu Zhang est un étudiant brillant qui se classe parmi les tous premiers du master de Rennes, qui est particulièrement exigeant. Il est par ailleurs lauréat d'une bourse d'excellence du Centre Henri Lebesgue. Dès le début de notre encadrement, nous avons été frappé par sa grande culture mathématique : il est tout à fait de courant de nombreux travaux récents sur la thématique sans que nous ne lui en ayons parlé.

Le stage se déroule parfaitement. Nous lui avons donné un sujet ambitieux (voir section suivante pour plus de détails) qui demande d'apprendre de nombreuses techniques d'analyse (calcul pseudodifférentiel, intégrales oscillantes, ...). Hongyu fait preuve d'une grande autonomie dans son travail et a déjà eu des avancées notables sur la question. Il en arrivera certainement au bout d'ici la fin de son stage, ce qui devrait donner lieu à une première publication.

Durant la période de son stage, Hongyu aura participé à trois rassemblements scientifiques en lien avec son sujet :

- Participation à la conférence annuelle de l'équipe, les « Journées EDP de l'IECL », du 2 au 4 avril à Metz.
- Participation à la réunion ANR « SMOOTH », du 11 au 13 juin à Lyon. Ce projet ANR, dont nous faisons partie, porte sur des problématiques proches de ce projet de recherche. Hongyu pourra profiter tout au long de sa thèse de l'activité scientifique liée à ce contrat.
- Participation à l'école d'été « Probabilistic approaches to dispersive PDEs », du 16 au 20 juin à Bilbao. Les cours donnés à cette école d'été portent directement sur des aspects du projet de recherche (ceci concerne les trois dernières étapes du projet).

La première conférence lui a permis de s'intégrer naturellement dans l'équipe EDP et les deux autres contribueront à son insertion dans la communauté liée à son domaine de recherche.

**En conclusion**, Hongyu Zhang est un **étudiant excellent, faisant preuve de grande maturité et extrêmement motivé par son travail de recherche**. Il ne fait aucun doute qu'il est le candidat idéal pour ce projet de thèse et il a tous les acquis scientifiques nécessaires pour ce projet de recherche. Notons de plus qu'humainement **nous avons un très bon contact**, facilité par sa très bonne connaissance du français. Nous sommes enthousiastes à l'idée d'encadrer cette thèse.

### 3 Le sujet

#### 3.1 Contexte

Ce projet de thèse s'inscrit dans l'étude de propriétés qualitatives d'équations aux dérivées partielles d'évolution non-linéaires, en présence d'aléa. Plus particulièrement, nous nous intéressons à une classe d'équations appelées dispersives, qui comprend notamment l'équation des ondes et l'équation de Schrödinger, en présence de données initiales déterministes ou aléatoires. Ces modèles sont très étudiés puisqu'ils servent à décrire de nombreux phénomènes physiques : en optique non-linéaire, en électromagnétisme, en mécanique des fluides et en mécanique quantique notamment.

Un condensat de Bose-Einstein est un état de la matière obtenu à partir d'un gaz constitué de bosons à très basse température. Si la température est inférieure à une température critique (nommée température de Bose), presque tous les bosons sont dans l'état quantique le plus bas, et ce phénomène est appelé condensation de Bose-Einstein.

Mathématiquement, l'état d'une telle particule est décrit par une fonction d'onde  $\psi : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $|\psi|^2$  représente la densité de probabilité de trouver la particule au point  $x$  à l'instant  $t$ . Cette fonction vérifie donc  $\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(t, x)|^2 dx = 1$  en tout temps  $t \in \mathbb{R}$ . De plus, en présence d'un potentiel extérieur confinant la particule, l'évolution temporelle de  $\psi$  est décrite

(après normalisation des constantes physiques) par l'équation de Gross-Pitaevskii

$$\begin{cases} i\partial_t\psi = H\psi + \lambda|\psi|^2\psi, & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \\ \psi(0, x) = \psi_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\text{GP})$$

Ici,  $H = -\Delta + |x|^2$  est l'oscillateur harmonique, où le terme  $|x|^2$  représente le potentiel de confinement, et  $\lambda \in \mathbb{R}$  est la constante de couplage du système : lorsque  $\lambda > 0$ , la non-linéarité est défocalisante, tandis que  $\lambda < 0$  représente une non-linéarité focalisante.

Dans [35], les auteurs montrent que l'équation (GP) est bien posée (existence locale et unicité d'une solution pour chaque donnée initiale  $\psi_0$ , et continuité de la solution par rapport à la donnée initiale) dans  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$  pour tout  $s \geq s_c = \max(0; \frac{d}{2} - 1)$ . Ici, l'espace pour la donnée initiale est l'espace de Sobolev adapté à l'oscillateur harmonique :

$$\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \quad H^{s/2}u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Ce résultat est optimal car dans le cas  $d \geq 3$  et pour  $0 < s < s_c$ , [30] montre un phénomène d'instabilité pour des données initiales dans  $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$  qui implique le caractère mal posé de l'équation : la solution, si elle existe, ne peut plus être continue par rapport à la donnée initiale.

Ceci a motivé l'étude de (GP) en présence de données initiales *aléatoires* de régularité sur-critique  $s < 0$  dans [31, 7] lorsque  $d = 1$ , et [10] lorsque  $d = 2$  mais avec une hypothèse de radialité sur la condition initiale. Cette problématique s'inscrit ainsi dans la thématique de recherche initiée par Lebowitz-Rose-Speer [19] et Bourgain [5, 6], et ensuite développée par Burq-Tzvetkov [8], Thomann [31, 7, 21], pour ne citer que quelques-uns. Cette thématique s'est depuis énormément développée, culminant avec les travaux récents [11, 12]. Cependant, à l'exception des résultats déjà cités ci-dessus pour le modèle (GP), la plupart des résultats existants concernent le cas d'un domaine spatial compact. Au-delà des motivations physiques, il apparaît donc particulièrement pertinent de chercher à comprendre comment ce programme peut s'adapter au cas d'un domaine spatial non compact mais en présence d'un potentiel confinant.

### 3.2 Objectifs de la thèse

Le but de ce projet de thèse est donc d'approfondir la compréhension des modèles dispersifs avec condition initiale aléatoire dans le cas d'un domaine spatial non compact mais en présence de confinement. Un problème ouvert bien identifié dans cette thématique concerne la levée de l'hypothèse de radialité du travail [10]. Ce problème semble particulièrement délicat, aussi nous proposons dans cette thèse de faire un premier pas dans cette direction en étudiant le modèle fractionnaire

$$i\partial_t\psi = H^\alpha\psi + \lambda|\psi|^2\psi, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d, \quad (\text{GP}\alpha)$$

pour un exposant  $\alpha \geq 1$ . En effet, dans le cas sans potentiel confinant où  $H^\alpha$  est remplacé par  $(-\Delta)^\alpha$ , il est connu que lorsque  $\alpha$  augmente, les propriétés de dispersion liées à la partie linéaire de l'équation sont plus prononcées, et il s'avère donc possible de traiter des données initiales moins régulières que pour des valeurs de  $\alpha$  inférieures. Ainsi le but de la thèse est d'étudier l'influence de ce paramètre  $\alpha \geq 1$  sur le caractère bien posé de l'équation pour des données initiales déterministes ou aléatoires.

**Première étape : étudier les propriétés dispersives de l'équation linéarisée.** Dans les modèles dispersifs non-linéaires sur  $\mathbb{R}^d$ , il est bien connu [9, 20] que l'étude du caractère bien posé repose de manière cruciale sur des estimations espace-temps de la solution du problème linéarisé, connues sous le nom d'estimations de Strichartz. Ces estimations, dans leur version locale en temps, prennent la forme suivante :

$$\|e^{itH^\alpha} f\|_{L_T^p L_x^q} \leq C_{T,p,q} \|f\|_{L^2}, \quad (1)$$

pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$  et pour un certain régime d'exposants  $p, q \in [2; \infty]$  et de temps  $T > 0$ .

Ces estimations sont connues dans le cas  $\alpha = 1$  [35] grâce à une expression explicite (la formule de Mehler) dans l'espace physique du noyau du semi-groupe  $e^{itH}$ , et un argument d'analyse fonctionnel standard, appelé  $TT^*$ . L'adaptation au cas  $\alpha > 1$  présente de nombreuses difficultés techniques supplémentaires faisant appel à l'analyse harmonique. Hongyu a déjà obtenu des résultats préliminaires sur cette question.

**Deuxième étape : étudier le caractère bien posé du modèle non-linéaire pour des données déterministes.** Une fois les estimations linéaires obtenues, l'étape suivante naturelle consiste à les utiliser pour obtenir le caractère bien posé local du modèle non-linéaire ( $GP\alpha$ ) dans l'espace des phases le plus large possible, *i.e.*  $\psi_0 \in \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^d)$  avec  $s$  le plus petit possible. Hongyu a déjà déterminé le meilleur exposant conjecturé  $s_c(\alpha)$  dicté par des considérations de scaling de l'équation, et connaît les méthodes permettant de traiter le cas  $\alpha = 1$ . Cette étape devrait donc aboutir assez rapidement une fois la première étape achevée.

**Troisième étape : étudier le cas de données initiales aléatoires légèrement sur-critique.** Le but de cette troisième étape est de comprendre comment l'aléa sur la donnée initiale permet de donner un sens à la solution même lorsque la régularité  $s$  est sur-critique :  $s < s_c(\alpha)$ . Comme mentionné ci-dessus, ceci est connu dans le cas  $\alpha = d = 1$  [31, 7] ou  $\alpha = 1$ ,  $d = 2$  avec hypothèse radiale [10]. Mais même dans le cas d'un domaine compact, très peu de résultats se sont penchés sur l'influence de la dispersion dans les méthodes probabilistes : on peut citer par exemple [29] ou [22].

La méthode originale développée par Bourgain [6] consiste à chercher une solution  $\psi$  à ( $GP\alpha$ ) sous la forme

$$\psi(t) = e^{itH^\alpha} \psi_0 + \varphi(t), \quad (2)$$

où  $\psi_0$  est la donnée initiale aléatoire, et  $\varphi$  est la nouvelle inconnue, solution de l'équation

$$\begin{cases} i\partial_t \varphi = H^\alpha \varphi + |\varphi + e^{itH^\alpha} \psi_0|^2 (\varphi + e^{itH^\alpha} \psi_0), & (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \\ \varphi(0, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (\text{randomGP}\alpha)$$

Dans le cas  $\alpha = d = 1$ , en combinant des effets dispersifs multi-linéaires de régularisation avec des arguments probabilistes, il est ainsi possible traiter à une régularité *sous-critique*  $\sigma > s_c$  les termes faisant apparaître la solution linéaire  $e^{itH} \psi_0$ , qui elle n'a que la régularité sur-critique  $s < 0$ , et ainsi de montrer le caractère bien posé de (randomGP $\alpha$ ) pour  $\varphi$  de régularité  $\sigma > s_c$ .

La question pertinente dans cette troisième étape est ainsi de comprendre quelle est la plus petite valeur possible de  $s < s_c(\alpha)$  en fonction de  $\alpha$  qu'il est possible de traiter grâce à l'aléa sur la donnée initiale, pour une dimension  $d$  quelconque et sans hypothèse de radialité. Ceci permettra de mieux comprendre comment aborder le cas très difficile  $\alpha = 1, d = 2$  encore ouvert.

Hongyu a déjà étudié cette approche dans le cadre plus simple de l'équation des ondes à régularité sur-critique mais positive résolu dans [8], et devrait donc pouvoir obtenir un résultat préliminaire pour des valeurs "légèrement" sur-critiques de  $s$ .

**Quatrième étape : globalisation des solutions.** Les solutions construites dans les étapes précédentes ne sont que locales en temps, et un objectif naturel est d'essayer de les globaliser et d'obtenir des informations qualitatives sur leur comportement en temps grand. Cette question est hautement non triviale lorsque la solution évolue dans un espace des phases de régularité *sur-critique*, puisqu'il n'y a pas d'énergie conservée à ce niveau de régularité, ni phénomène de dissipation d'énergie pour ce modèle dispersif. Une approche proposée par Bourgain [5, 6] consiste à utiliser l'invariance (formelle) de la mesure de Gibbs

$$d\rho = e^{-E(\psi)} d\psi \quad (\text{Gibbs})$$

associée à l'énergie

$$E_\alpha(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |H^{\frac{\alpha}{2}} \psi|^2 dx + \frac{\lambda}{4} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^4 dx. \quad (E_\alpha)$$

Des méthodes récentes [2] telles que celles utilisées dans [22] permettent de donner un sens rigoureux à l'expression formelle (Gibbs). Encore une fois, cette étude a été essentiellement réalisé en domaine compact, ou alors dans le cas  $\alpha = 1$ ,  $d = 1$  [7], ou  $d = 2, 3$  [4, 13] pour le modèle parabolique associé (lorsque le “ $i$ ” est de (GP) est remplacé par -1).

Dans le cas défocalisant  $\lambda > 0$ , la construction de (Gibbs) associée à  $(E_\alpha)$  devrait donc suivre les arguments de [22]. Cependant, le cas focalisant  $\lambda < 0$  est beaucoup moins clair ; il est traité sous hypothèse radiale dans [10, 23] pour  $\alpha = 1$ . Le cas général  $\alpha > 1$  semble donc une extension naturelle, et la globalisation en utilisant (Gibbs) devrait suivre l'argument de [7].

**Cinquième étape : ansatz raffiné et régime sous-critique probabiliste.** Dans cette dernière partie, le doctorant pourra explorer les méthodes très récentes de [11, 12], développée dans le cadre du tore, au cas de  $\mathbb{R}^d$  avec potentiel confinant. Ces méthodes reposent sur un ansatz beaucoup plus poussé que celui donné en (2). Ainsi, après avoir identifié à la troisième étape pour quel régime  $s_c^{(1)}(\alpha) < s < s_c(\alpha)$  il est possible de résoudre l'équation grâce à l'aléa de la donnée initiale combiné avec l'ansatz (2), il est envisagé dans cette dernière étape de voir jusqu'où l'ansatz raffiné de [11, 12] permet de descendre en terme de régularité sur-critique  $s \leq s_c^{(1)}(\alpha)$ .

### 3.3 Planning prévisionnel

- Première année de thèse : les deux premières étapes devraient être réalisées, donnant lieu à la rédaction d'un premier article.
- Deuxième année de thèse : utilisation des méthodes probabilistes déjà apprises de [6, 8, 22] au cas de (GP $\alpha$ ), apprentissage des méthodes de [2, 22] pour la globalisation, et finalisation des troisième et quatrième étape. Rédaction d'un second article.
- Troisième année de thèse : gros travail bibliographique pour digérer l'ansatz raffiné de [11, 12] et réalisation de la cinquième étape. Rédaction d'un troisième article.

Ce programme est ambitieux mais réaliste au regard des avancées déjà effectuées par Hongyu pendant son stage.

## Références

- [1] I. Bailleul, H. Eulry et T. Robert. Variational methods for some singular stochastic elliptic PDEs. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (2024).
- [2] N. Barashkov et M. Gubinelli. A variational method for  $\Phi_3^4$ . *Duke Math. J.* 169 (2020), no. 17, 3339–3415.
- [3] A. Boritchev, D. Eceizabarrena et V. Vilaça Da Rocha. Intermittency of Riemann's non-differentiable function through the fourth-order flatness *J. Math. Phys.* 62 (2021), no. 9, Paper No. 093101, 14 pp.
- [4] A. de Bouard, A. Debussche et R. Fukuizumi. Two-dimensional Gross-Pitaevskii equation with space-time white noise. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2023, no. 12, 10556–10614.
- [5] J. Bourgain. Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures. *Comm. Math. Phys.* 166 (1994), 1–26.
- [6] J. Bourgain. Invariant measures for the 2D-defocusing nonlinear Schrödinger equation. *Comm. Math. Phys.* 176 (1996), 421–445.
- [7] N. Burq, L. Thomann et N. Tzvetkov. Long time dynamics for the one dimensional non linear Schrödinger equation. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 63 (2013), no. 6, 2137–2198.
- [8] N. Burq et N. Tzvetkov. Random data Cauchy theory for supercritical wave equations I : local theory. *Invent. math.* 173 (2008), no. 3, 449–475.
- [9] T. Cazenave. Semilinear Schrödinger equations. Courant Lecture Notes in Mathematics, 10. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York ; American Mathematical Society, Providence, RI, 2003. xiv+323 pp.

- [10] Y. Deng. Two-dimensional nonlinear Schrödinger equation with random radial data. *Analysis & PDE* 5.5 (2012) : 913–960.
- [11] Y. Deng, A. R. Nahmod et H. Yue. Invariant Gibbs measures and global strong solutions for nonlinear Schrödinger equations in dimension two. *Annals of Mathematics*, 2024, vol. 200, no 2, p. 399–486.
- [12] Y. Deng, A. R. Nahmod et H. Yue. Random tensors, propagation of randomness, and nonlinear dispersive equations. *Invent. Math.* 228 (2022), no. 2, 539–686.
- [13] A. Deya, R. Fukuizumi et L. Thomann. On the parabolic  $\Phi_3^4$  model for the harmonic oscillator : diagrams and local existence. *Preprint : arXiv :2504.03232 [math.PR]*.
- [14] A. Deya, N. Schaeffer et L. Thomann. A nonlinear Schrödinger equation with fractional noise. *Trans. Amer. Math. Soc.* 374 (2021), no. 6, 4375–4422.
- [15] D. Eceizabarrena et V. Vilaça Da Rocha. An analytical study of flatness and intermittency through Riemann’s non-differentiable functions. *SIAM J. Math. Anal.* 54 (2022), no. 3, 3575–3608.
- [16] H. Eulry, A. Mouzard et T. Robert. Anderson stochastic quantization equation. *Preprint : arXiv :2401.12742 [math.AP]*.
- [17] P. Germain, V. Schwinte et L. Thomann. On the stability of the Abrikosov lattice in the Lowest Landau Level. *J. Éc. polytech. Math.* 12 (2025), 585–640.
- [18] B. Grébert et V. Vilaça Da Rocha. Stable and unstable small amplitude solutions for a system of coupled NLS equations. *Nonlinearity* 31 (2018), no. 10, 4776–4811.
- [19] J.L. Lebowitz, H.A. Rose et E.R. Speer. Statistical mechanics of the nonlinear Schrödinger equation. *J. Statist. Phys.* 50 (1988), no. 3-4, 657–687.
- [20] F. Linares et G. Ponce. Introduction to nonlinear dispersive equations. Second edition. Universitext. Springer, New York, 2015. xiv+301 pp.
- [21] A. Poiret, D. Robert et L. Thomann. Probabilistic global well-posedness for the supercritical nonlinear harmonic oscillator. *Anal. PDE* 7 (2014), no. 4, 997–1026.
- [22] T. Robert. Invariant Gibbs measure for a Schrödinger equation with exponential nonlinearity. *J. Funct. Anal.* (2024)
- [23] T. Robert, K. Seong, L. Tolomeo et Y. Wang. Focusing Gibbs measures with harmonic potential. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 61(1) : 571–598.
- [24] T. Robert et Y. Zine. Stochastic complex Ginzburg-Landau equation on compact surfaces. *Preprint : arXiv :2502.21128 [math.AP]*.
- [25] N. Schaeffer. Study of a fractional stochastic heat equation. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* 20 (2023), no. 1, 425–461.
- [26] N. Schaeffer. Multilinear smoothing and local well-posedness of a stochastic quadratic nonlinear Schrödinger equation. *J. Theoret. Probab.* 37 (2024), no. 1, 160–208.
- [27] V. Schwinte. An optimal minimization problem in the lowest Landau level and related questions. *Comm. Math. Phys.* 405 (2024), no. 4, Paper No. 98, 36 pp.
- [28] V. Schwinte et L. Thomann. Growth of Sobolev norms for coupled Lowest Landau Level equations. *Pure Appl. Anal.* 3 (2021), No. 1, 189–222.
- [29] C. Sun et N. Tzvetkov. Refined probabilistic global well-posedness for the weakly dispersive NLS. *Nonlinear Anal.* 213 (2021), Paper No. 112530, 91 pp
- [30] L. Thomann. Instabilities for supercritical Schrödinger equations in analytic manifolds. *J. Differential Equations* 245 (1) (2008) 249–280.
- [31] L. Thomann. Random data Cauchy problem for supercritical Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire* 26 (2009), no. 6, 2385–2402.
- [32] V. Vilaça Da Rocha. Modified scattering and beating effect for coupled Schrödinger systems on product spaces with small initial data. *Trans. Amer. Math. Soc.* 371 (2019), no. 7, 4743–4768.

- [33] V. Vilaça Da Rocha. Asymptotic behavior of solutions to the cubic coupled Schrödinger systems in one space dimension. *Dynamics of Partial Differential Equations*, 13(1), 1219–1274 (2016).
- [34] V. Vilaça Da Rocha. Emphasizing nonlinear behaviors for cubic coupled Schrödinger systems. *Journées Équations aux dérivées partielles 2017*, Cedram.
- [35] K. Yajima et G. Zhang. Smoothing Property for Schrödinger Equations with Potential Superquadratic at Infinity. *Commun. Math. Phys.* 221, 573–590 (2001).