

Master 2 MFA – Recherche Mathématique de l'Université de Lorraine (Metz-Nancy)

Responsables : Samuel Tapie (Nancy) et Tilmann Wurzbacher (Metz)

Ce Master 2 propose une initiation à la recherche mathématique contemporaine. Il peut être le point d'aboutissement d'études mathématiques. C'est aussi une année permettant de s'orienter vers une thèse de doctorat et les métiers de la recherche mathématique. Il est adossé aux équipes de recherche de l'Institut Elie Cartan de Lorraine. Les cours peuvent tous être suivis en présentiel depuis Nancy et Metz.

Les cours proposés s'articulent en deux parcours thématiques qui varient d'une année sur l'autre, et couvrent la plupart des thématiques de recherche de l'IECL sur 4 ans. Chaque parcours propose deux cours par semestre. Chaque étudiant doit valider trois cours au premier semestre (septembre à janvier) et deux cours au second semestre (fin janvier à avril), suivis d'un stage de recherche en laboratoire.

2025-2026 : parcours « Equations aux Dérivées Partielles » et parcours « Géométrie Riemannienne »

2026-2027 : parcours « Probabilités – Statistiques » et parcours « Théorie Analytique des Nombres »

2027-2028 : parcours « Equations aux Dérivées Partielles » et parcours « Géométrie Algébrique et Complexe »

2025-2026

Parcours « Equations aux Dérivées Partielles » :

1^{er} semestre :

Semi-groupes et EDP dispersives (36h CM, 18h TD), Jérémy Faupin et Laurent Thomann :

- Partie 1 : Semi-groupes et EDP linéaires, Jérémy Faupin (18h CM et 9h TD)

Dans ce cours, nous nous intéresserons aux :

- Semi-groupes en dimension finie et semi-groupes uniformément continus : exponentielle de matrices, exponentielle d'opérateurs bornés, rappels et compléments
- Semi-groupes fortement continus dans un espace de Banach : théorèmes de Hille-Yosida et applications
- EDP linéaires d'évolution : équation de transport, équation de la chaleur, équation de Schrödinger, équation des ondes

Références :

- A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*
- K.J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*

- Partie 2 : Introduction aux EDP non-linéaires dispersives, Laurent Thomann (18h CM et 9h TD)

Ce cours vise à développer quelques méthodes classiques pour l'étude d'équations d'évolutions dispersives. Nous allons présenter des techniques d'analyse et les appliquer à la résolution de quelques équations de type ondes ou Schrödinger. En particulier nous verrons les notions suivantes :

- Espaces de Sobolev : ces espaces sont les espaces naturels de résolution de ces équations. Nous allons effectuer quelques rappels.
- Interpolation : sans faire toute la théorie, nous allons en présenter quelques idées importantes.
- Inégalités de Strichartz : ce sont des estimations de la solution d'une équation linéaire sous formes de normes intégrales en temps et en espace. Ces inégalités sont très utiles dans la résolution des équations non-linéaires de type ondes ou Schrödinger.
- Méthodes de point fixe : nous étudierons un ou deux exemples de résolutions d'équations non-linéaires avec un argument de point fixe de Picard.
- Étude en temps grand : une fois la solution construite (localement en temps), nous allons étudier si elle se prolonge globalement ou si elle explose en temps fini.

Références :

- F. Linares, G. Ponce, *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Universitext Springer, New York, 2009, xii+256 pp.
- T. Tao, *Nonlinear dispersive equations*. CBMS Reg. Conf. Ser. Math., 10. AMS Providence, RI, 2006, xvi+373 pp.

EDP elliptiques et théorie spectrale (36h CM, 18h TD), Frédéric Robert & David Dos Santos :

- Partie 1 : EDP elliptiques, Frédéric Robert, (18h CM et 9h TD)

Dans ce cours, on introduira les outils de base pour l'étude de quelques problèmes elliptiques non-linéaires. Après la présentation d'outils fondamentaux comme les espaces de Sobolev et la théorie de la régularité, on résoudra des problèmes sous-critiques par des méthodes variationnelles comme la minimisation ou bien le Lemme du col d'Ambrosetti-Rabinowitz. On se consacrera ensuite à des problèmes critiques pour lesquels il n'y a pas nécessairement de solution.

- Partie 2 : Théorie spectrale, David Dos Santos (18h CM et 9h TD)

Il s'agit dans ce cours de généraliser la diagonalisation des endomorphismes symétriques sur un espace euclidien au cas de la dimension infinie sur un espace de Hilbert. La notion de spectre est déjà plus subtile dans les espaces de Banach. La plupart des applications, par exemple dans l'étude des équations aux dérivées partielles, nécessite l'étude d'opérateurs non bornés — c'est à dire non continus et définis sur un sous-espace vectoriel (dense) de l'espace ambiant, appelé le domaine de l'opérateur. Nous commencerons par l'étude des opérateurs compacts, qui se rapprochent le plus des matrices (avec une infinité de coefficients), pour nous intéresser ensuite à la construction de la mesure spectrale associé à un opérateur auto-adjoint. Nous étudierons des exemples tirés de l'étude des équations aux dérivées partielles.

Programme indicatif :

I. Spectre

1. Opérateurs non bornés

2. Spectre et résolvente

3. Spectre ponctuel, continu et résiduel
- II. Théorème spectral pour les opérateurs bornés
 1. Opérateurs compacts
 2. Applications
 3. Calcul fonctionnel
- III. Théorème spectral pour les opérateurs non bornés
 1. Opérateurs unitaires
 2. Transformation de Cailey
 3. Calcul fonctionnel et groupes
 4. Exemple du laplacien sur \mathbb{R}^n

Références :

- Michael Reed - Barry Simon Method of modern mathematical Physics.

2nd semestre :

Equations intégrales (30h CM), Alexandre Munnier :

Après quelques rappels sur la théorie variationnelle classique pour les problèmes elliptiques en domaines bornés (théorème de Lax-Milgram, inégalités de Poincaré, théorie des traces), nous nous intéresserons aux problèmes aux limites dans des domaines non bornés. Nous étudierons l'approche basée sur les espaces de Sobolev *à poids*. Nous montrerons ensuite que les fonctions harmoniques peuvent être représentées par des opérateurs intégraux (les potentiels de simple et double couche), appliqués à des mesures supportées par la frontière du domaine. Cette méthode permet une analyse fine des propriétés des solutions, inaccessible par la méthode variationnelle.

Référence :

McLean, W.: Strongly elliptic systems and boundary integral equations. Cambridge University Press, Cambridge (2000).

Introduction au calcul des variations (30h CM), Antoine Lemenant et Yannick Privat :

- **Partie I- (Antoine Lemenant) : Théorie de la mesure géométrique pour le calcul des variations**

Le but de cette partie est d'introduire quelques outils élémentaires issus de la théorie géométrique de la mesure en vue de les utiliser en calcul des variations. Nous étudierons notamment les lemmes de recouvrement, le théorème de différentiation de Lebesgue, puis les mesures de Hausdorff et le problème de la semi-continuité inférieure (notion d'uniforme concentration). Nous passerons ensuite à la notion d'ensemble rectifiable et manipulerons les formules de l'aire et de la co-aire. Nous verrons ensuite les domaines à périmètre fini introduits par De Giorgi et enfin l'espace SBV permettant de définir des problèmes à discontinuité libre.

Les références pour cette partie sont par exemple :

- Maggi : "Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems: An Introduction to Geometric Measure Theory"

- Ambrosio, Fusco, Pallara : "Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems"

- **Partie II- (Yannick Privat) : Introduction au contrôle optimal**

Ce cours propose une introduction au contrôle optimal, domaine du calcul des variations qui consiste à déterminer une stratégie ou un signal de commande permettant de piloter un

système dynamique de manière à optimiser un critère donné (temps, énergie, coût, etc.). Sont abordés les résultats d'existence de contrôles optimaux via la méthode directe du calcul des variations, les conditions nécessaires d'optimalité formulées par le principe du maximum de Pontryagin, ainsi que plusieurs exemples concrets. Une attention particulière est portée aux problèmes issus du calcul des variations géométriques, tels que les trajectoires minimales, les problèmes à frontière libre ou encore les dynamiques soumises à des contraintes géométriques.

Références :

- B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*, John Wiley, New York, 1967.
- E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie & applications.*, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes", 2005.

Parcours « Géométrie Riemannienne » :

1^{er} semestre :

- **Introduction à la Géométrie Différentielle (36h CM + 18hTD) :**

- a. Partie 1 : Introduction aux variétés différentielles (18h CM, 9h TD), Nicolas Ginoux (TD) & Samuel Tapie (CM)

- définition des variétés différentielles, espaces tangents, champs de vecteurs ;
- étude des exemples des sous-variétés de \mathbb{R}^n , des groupes de Lie linéaires (sur \mathbb{R}) et des espaces homogènes G/H où G est un groupe de Lie linéaire réel et H un sous-groupe fermé, des tores et des grassmanniennes

- b. Partie 2 : Formes différentielles et tenseurs (18h CM, 9h TD), Camille Laurent-Gengoux et Hervé Oyono (CM), Nicolas Ginoux (TD)

- formes différentielles, cohomologie de De Rham, intégration d'une forme volume
- métrique riemannienne, volume associé à une métrique riemannienne (pas de géodésique ni de courbure)
- notions de tenseurs et de fibrés vectoriels illustrées par les exemples précédents

Références :

- Lafontaine Jacques, *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences
- Lee, John M. *Introduction to smooth manifolds*, Springer
- Milnor John, *Topology from the differential view point*, Princeton

- **Groupe fondamental, revêtements, surfaces de Riemann (36h CM + 18h TD) :**

- a) Partie 1 : groupe fondamental et revêtements (18h CM, 9h TD), Julien Maubon

- *Groupe fondamental, propriétés, exemples*
- *Revêtements, exemples*
- *Action du groupe fondamental et classification des revêtements*
- *Revêtement universel, quotients par un groupe agissant librement*
- *(selon le temps) théorèmes de Van Kampen*

Références :

- *Analysis Situs, Topologie Algébrique des Variétés* <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/>
- *F. Labourie, Groupe Fondamental et Revêtements* <https://math.univ-cotedazur.fr/~labourie/preprints/pdf/groupefond.pdf>
- *T. Gamelin, R. Greene, Introduction to Topology*

- b) Partie 2 : uniformisation des surfaces de Riemann (18h CM, 9h TD), Damian Brotbek

Théorème d'uniformisation de Riemann : Toute surface de Riemann simplement connexe est isomorphe à la sphère, au plan ou au disque ouvert.

Il s'agit d'un des résultats majeurs du XIX^{ème} siècle, poursuivi par le Théorème d'Uniformisation de Poincaré-Koebe : toute surface de Riemann possède une unique métrique riemannienne à courbure constante qui lui est conformément équivalente.

Ce cours présente ces deux théorèmes d'uniformisations et ses outils principaux : surfaces de Riemann, courbure de Gauss, changement conformes, et introduit les étapes principales de leurs preuves.

Références :

- H. P. De Saint Gervais. <https://analysis-situs.math.cnrs.fr/>, 2014-2022.
- P. Guillot, *Leçons sur l'homologie et le groupe fondamental*, SMF, 2e édition augmentée
- H. P. De Saint Gervais. *Uniformisation des surfaces de Riemann : Retour sur un théorème centenaire*, Lyon, ENS Éditions, 2011

2nd semestre :

- **Géométrie Riemannienne (30h CM), Jean-François Grosjean**

Ce cours est une introduction à la géométrie riemannienne, à ses outils classiques (géodésiques, courbure, champs de Jacobi...) et à quelques uns de ses grands théorèmes.

- Métriques riemanniennes, volume (révision),
- longueur, géodésiques,
- variétés complètes et théorème d'Hopf-Rinow,
- courbure, champs de Jacobi,
- théorème de Cartan Hadamard, théorèmes de comparaison de Rauch et Bishop-Gromov...

Références :

- *Do Carmo, Riemannian Geometry.*
- *Cheeger-Ebin, Comparison theorems in Riemannian geometry*

- **Analyse globale sur les variétés (30h CM), Benoit Daniel & Nicolas Marque**

- a) Partie 1 : surfaces minimales (15h CM), Benoit Daniel

Une surface d'une variété riemannienne est dite minimale si sa courbure moyenne est nulle en tout point. Les surfaces minimales apparaissent dans des problèmes variationnels : elles sont points critiques pour la fonctionnelle d'aire (à bord fixé). Ce cours présentera une introduction aux surfaces minimales, principalement dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Nous nous intéresserons notamment aux liens entre les surfaces minimales et les fonctions méromorphes (application de Gauss, représentation de Weierstrass) et à la géométrie des surfaces minimales complètes à courbure totale finie.

Références

- Y. Fang. *Lectures on Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3 . Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications, Australian National University.*
- E. Carberry. *Lecture Notes on Minimal Surfaces. Disponible sur ocw.mit.edu (MIT).*
- R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces. Dover Phoenix Editions.*
- T. Colding et W. Minicozzi. *A Course in Minimal Surfaces. Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society.*

- b) Partie 2 : courbure scalaire et problème de Yamabe (15h CM), Nicolas Marque

Ce cours vise l'étude d'un grand classique d'analyse géométrique : le problème éponyme, dit de Yamabe. Après l'introduction en contexte (et en dialogue avec les autres cours) des outils analytiques (connexion, opérateur de Laplace-Beltrami, espaces et plongements de Sobolev sur une variété) et géométriques (courbures Riemanniennes, changements conformes de métriques), nous aborderons le problème en lui-même en commençant par la tentative de H. Yamabe, puis l'erreur détectée par N. Trudinger. Nous verrons comment corriger cette erreur amène jusqu'à l'étude de la masse ADM, utilisée en relativité générale. L'objectif du cours est que l'élève puisse utiliser la synthèse de Lee-Parker comme support de révision.

Références :

-*The Yamabe Problem*, J. Lee, T. Parker

Livres sur le problème de Yamabe :

- Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations*, T. Aubin,
- Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, T. Aubin,
- Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on \mathbb{R}^n* , A. Ambrosetti, A. Malchiodi
- From the Yamabe problem to the equivariant Yamabe problem*, E. Hebey

Sources géométriques :

- Riemannian geometry*, M. Do Carmo,
- Riemannian geometry*, T. Willmore,
- Semi-Riemannian geometry*, B. O'Neill,

Articles d'origine :

-*On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, H. Yamabe

-*Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, N. Trudinger

-*Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, T. Aubin

-*Canonical variables for general relativity*, R. Arnowitt, S. Deser, C. Misner

-*Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature*, R. Schoen

-*On the proof of the positive mass conjecture in general relativity*, R. Schoen, S.-T. Yau