Université de Lorraine — Année 2025-2026
Faculté de Sciences et Technologies — Mathématiques M2

FEUILLE DE TRAVAUX DIRIGÉS : COURBES ET SURFACES

Courbes planes

Exercice 1. Calculer la courbure et la longueur (si elle est finie) des courbes suivantes. Les représenter rapidement.

(1) Ellipses de demi-axes de longueurs respectives a et b.
(2) Cycloïde paramétrée par $u \mapsto (u - \sin u, 1 - \cos u)$.
(3) Spirale logarithmique $\phi \mapsto Ce^{-n\Phi}(\cos\phi, \sin\phi)$.
(4) Tractrice $t \mapsto \left(t - \tanh t, \frac{1}{\cosh t}\right)$.

Exercice 2. Etudiez la courbe paramétrée par $t \mapsto (\cos(3t), \sin(2t))$.

Exercice 3. (1) Montrer que si c est une courbe paramétrée régulière passant par deux points $M = c(a)$ et $N = c(b)$, montrer que pour tout vecteur unitaire u de $\mathbb{R}^2$,

$$\langle \overrightarrow{MN}, u \rangle \leq \int_a^b |c'(t)|dt.$$

Caractériser les cas d'égalités.

(2) En déduire que $MN \leq \int_a^b |c'(t)|dt$, avec égalité si et seulement si c parcourt le segment $[M, N]$.

Exercice 4. Calculer la courbure d'une courbe plane si elle est donnée en polaires $(r(s), \theta(s))$. Donner une formule quand $\theta = s$.

Exercice 5. Donner l'expression de la normale, du plan tangent, et de la courbure d'une courbe plane implicite.

Exercice 6. Soit γ une courbe paramétrée du plan ne passant pas par l'origine. Montrer que si $\gamma(t_0)$ est le point de la courbe le plus proche de l'origine, alors $\gamma(t_0) \perp \gamma'(t_0)$.

Exercice 7. Un disque circulaire de rayon 1 dans le plan roule sans glisser le long de l'axe des abscisse. On suppose qu'au temps $t = 0$ le centre $\Omega(t)$ du disque est à la position de coordonnées $(0, 1)$. On considère le point $M(t)$ sur le disque tel que $M(0) = (0, 0)$. Sa trajectoire est une cycloïde. Donner une paramétrisation par longueur d'arc de la cycloïde entre deux rotations complètes du disque, et étudier la courbe.

Exercice 8. Soit $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ $s \in [0, l]$ une courbe plane régulière et fermée (c'est-à-dire que $s(0) = s(l)$) paramétrée par longueur d'arc.

(1) Montrer qu'il existe $\theta(s)$ tel que $x'(s) = \cos\theta(s)$, $y'(s) = \sin\theta(s)$. Montrer que $\theta'(s) = \kappa(s)$ et donc qu'elle est définie globalement.
(2) En déduire qu'il existe un entier N tel que $\int_0^s \kappa(s)ds = 2\pi N$. On l'appelle l'indice de γ.

Exercice 9. Soit $\gamma(s)$ $s \in [0, l]$ une courbe plane fermée paramétrée par longueur d'arc et d'indice N. Montrer que si la courbure vérifie $0 < \kappa(s) \leq c$ où c est une constante, alors $l \geq \frac{2\pi N}{c}$.

Exercice 10. On suppose que toutes les normales d'une courbe paramétrée passent par un point fixé du plan. Montrer que la courbe en question est contenue dans un cercle.

Courbes gauches

Exercice 11. (1) Montrer que la courbure d'une courbe γ est donnée par
$$\kappa(s) = \frac{|\gamma' \times \gamma''|}{|\gamma'|^3}.$$

(2) Montrer que la torsion d'une courbe γ est donnée par
$$\tau(s) = -\frac{\langle \gamma'(s) \times \gamma''(s), \gamma'''(s)\rangle}{|\gamma' \times \gamma''|}.$$

Exercice 12. On considère la courbe paramétrée suivante $\gamma(s) = \left(a\cos\left(\frac{s}{c}\right), a\sin\left(\frac{s}{c}\right), b\frac{s}{c}\right)$.

(1) Montrer que s est la longueur d'arc.
(2) Calculer la courbure et la torsion de γ.
(3) Montrer que toutes les droites $\gamma(s) + \mathrm{Vect}(\vec{n}(s))$ sont perpendiculaires à l'axe des z.
(4) Montrer que l'angle $\langle \gamma', (0,0,1)\rangle$ est constant.

Exercice 13. On suppose que $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ est une courbe C^∞ paramétrée par longueur d'arc. On reprend les notations $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ pour le repère de Frénet, et (κ, τ) pour la courbure et la torsion.

(1) On suppose que γ est tracée sur une sphère de centre O de rayon r : $d(O, \gamma(s)) = r$.
  (a) Montrer que $\vec{t}$ et $\overrightarrow{O\gamma(s)}$ sont orthogonaux.
  (b) En déduire qu'il existe $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}$ tels que
$$\alpha^2 + \beta^2 = r^2$$
$$\forall s \in I\ \overrightarrow{O\gamma(s)} = \alpha(s)\vec{n}(s) + \beta(s)\vec{b}(s).$$
  (c) En déduire que
$$r^2 = \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right)^2.$$

(2) Réciproquement si $0 = \frac{\tau}{\kappa} + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right)'$, la courbe est tracée sur une sphère.

Surfaces paramétrées

Exercice 14. Montrer qu'une surface implicite est une surface lisse.

Exercice 15. Calculer la première forme fondamentale, la seconde forme fondamentale, la courbure de Gauss et la courbure moyenne pour les surfaces suivantes :

(1) Le plan,
(2) Le cylindre,
(3) Le graphe d'une fonction : $(x, y) \in \mathcal{U} \mapsto (x, y, f(x, y))$,
(4) Une surface de révolution $(t, \theta) \in I \times]-\pi, \pi] \mapsto (x(t)\cos\theta, x(t)\sin\theta, y(t))$ où $(x(t), y(t))$ est une courbe plane.
(5) La surface de révolution $\varphi : (t, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta, \log t)$.
(6) L'hélicoïde $(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (u\cos v, u\sin v, v)$.

(7) La surface d'Enneper $(u,v) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$.

Exercice 16. Justifier le plus rapidement possible que les trois surfaces suivantes ne sont pas localement isométriques : la sphère, le cylindre, le graphe : $z = x^2 - y^2$.

Exercice 17. On définit $\varphi : (t,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto (t\cos\theta, t\sin\theta, \log t)$ et $\psi : (u,v) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (u\cos v, u\sin v, v)$.

(1) En utilisant le theorema egregium montrer que si $F(t,\theta) = (u,v)$ est une isométrie entre les surfaces de φ et ψ, alors $u = t$.

(2) En déduire qu'il n'existe pas d'isométrie locale entre les surfaces définies par ψ et φ.

Exercice 18. Soit $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation d'une surface lisse, et soit $\Phi_\lambda := \lambda\Phi$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que Φ_λ est la paramétrisation d'une surface lisse et en calculer les quantités géométriques en fonction de celles de Φ.

Exercice 19. On étudie ici la famille des tores obtenus en déplaçant un cercle le long d'une courbe fermée de l'espace. Soit donc $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée par longueur d'arc, de longueur L (c'est-à-dire que γ est L-périodique), notons $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ son repère de Frénet et soit $\Phi_\gamma(s,\theta) = \gamma(s) + r\left(\cos\theta\vec{n}(s) + \sin\theta\vec{b}(s)\right)$.

(1) Étudier la surface Φ_γ.

(2) Calculer l'intégrale de Gauss-Bonnet de Φ_γ : $E(\Phi_\gamma) = \int_{[0,L]\times]-\pi,\pi]} K(s,\theta)|\Phi_s \times \Phi_\theta| ds d\theta$.

(3) On définit l'énergie de Willmore d'une surface paramétrée Φ définie sur $\mathcal{U}$ comme

$$W(\Phi) = \int_{\mathcal{U}} H^2 |\Phi_x \times \Phi_y| dxdy.$$

Montrer Φ est invariant par l'action des homothéties.

(4) Calculer l'énergie de Willmore de Φ_γ.

(5) Montrer que $W(\Phi_\gamma) \geq 2\pi^2$.

Exercice 20. Donner la forme des équations de Gauss-Codazzi-Mainardi pour une paramétrisation conforme.

Exercice 21. Donner une expression de la courbure moyenne pour une paramétrisation conforme.

Exercice 22. Déterminer les points ombilics de l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Exercice 23. Est-il possible de définir la courbure moyenne/de Gauss d'une surface non-orientable ? Si oui comment, si non pourquoi ?

Appliquer cela à l'étude du ruban de Möbius :

$$\phi(u,v) = \left(\left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\sin u, \left(2 - v\sin\frac{u}{2}\right)\cos u, v\cos\frac{u}{2}\right).$$

Exercice 24. Donner des (nouveaux) exemples de surfaces minimales, de surfaces de courbures de Gauss $K = -1$.

Exercice 25. On appelle surface minimale toute surface de $\mathbb{R}^3$ telle que $H = 0$. Montrer qu'il n'existe pas de surface minimale convexe.

Exercice 26. Montrer que si $\Phi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ est une surface minimale, $\Phi(\mathbb{D})$ est contenue dans l'enveloppe convexe de la courbe $\Phi(\partial\mathbb{D})$.

Exercice 27. Montrer que toute surface compacte fermée a un point de courbure de Gauss positive.