Complexes cellulaires.

On rappelle la définition. B^n désignera la boule unité fermée dans $\mathbb{R}^n$ et S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Une *n-cellule* e^n est un espace topologique homéomorphe à une boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$. Un *complexe cellulaire* est un espace topologique X construit de la façon suivante :

(1) On commence avec un ensemble discret X^0 appelé le 0-squelette de X. Ses éléments sont les 0-cellules (des points).

(2) Par récurrence, on construit le n-squelette X^n à partir du $(n-1)$-squelette X^{n-1} en attachant des n-cellules e^n_α via des *applications d'attachement* $\varphi_\alpha : S^{n-1} \to X^{n-1}$. Cela veut dire que l'on se donne une collection de boules fermées B^n_α, et que X^n est l'espace quotient obtenu à partir de $X^{n-1} \sqcup_\alpha B^n_\alpha$ en identifiant x et $\varphi_\alpha(x)$ pour $x \in \partial B^n_\alpha = S^{n-1}$. La cellule $e^n_\alpha \subset X^n$ est l'image homéomorphe de $B^n_\alpha \backslash \partial B^n_\alpha$.

(3) $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ avec la topologie dite faible, c'est-à-dire que $A \subset X$ est ouvert (resp. fermé) dans X si et seulement si $A \cap X^n$ est ouvert (resp. fermé) dans X^n pour tout n.

Le complexe cellulaire est partitionné par ses cellules. Toute cellule e^n_α de X a une *application caractéristique* $\Phi^n_\alpha : B^n_\alpha \to X$ qui est la composée $B^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \sqcup_\beta B^n_\beta \to X^n \hookrightarrow X$. Cette application est continue car c'est une composée d'applications continues (l'inclusion $X^n \hookrightarrow X$ est continue par le point (3)). La restriction de Φ^n_α à l'intérieur de B^n_α est un homéomorphisme sur e^n_α. La restriction de Φ^n_α au bord de B^n_α est l'application d'attachement φ_α.

Un complexe cellulaire X est *fini* s'il n'a qu'un nombre fini de cellules, il est de *dimension finie* si $X = X^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, sa dimension est le min des n tels que $X = X^n$.

Si X est un complexe cellulaire, un *sous-complexe* de X est un sous-ensemble Y de X qui est une union de cellules de X et tel que si e est une cellule de X incluse dans Y alors l'adhérence $\overline{e}$ de e dans X est aussi incluse dans Y.

On dit qu'un espace topologique X admet une structure de complexe cellulaire, ou une décomposition cellulaire, s'il est homéomorphe à un espace topologique obtenu comme expliqué ci-dessus. En général, une telle structure n'est pas unique.

---

(1) (Quelques exemples)

- **(a)** Trouver une décomposition cellulaire de l'espace projectif complexe $\mathbb{CP}^n$ avec exactement une cellule de dimension $2i$ pour chaque i entre 0 et n.
- **(b)** Trouver une décomposition cellulaire du tore T^2 avec exactement une cellule de dimension 2.
- **(c)** Trouver une décomposition cellulaire de la bande de Moebius avec exactement une cellule de dimension 2.

(2) (Sur la topologie des complexes cellulaires) Soit X un complexe cellulaire (avec les notations ci-dessus).

- **(a)** Montrer que si X est de dimension finie, alors la condition (3) dans la définition d'un complexe cellulaire est inutile.
- **(b)** Montrer que $A \subset X$ est ouvert (fermé) dans X si et seulement si $\Phi_\alpha^{-1}(A)$ est ouvert (fermé) dans B_α pour tout α.
- **(c)** Montrer que pour tout n, X^n est fermé dans X.
- **(d)** Montrer que si e^n est une n-cellule de X et Φ^n son application caractéristique alors $\overline{e^n} = \Phi^n(B^n)$, et que $\overline{e^n} \backslash e^n = \Phi^n(\partial B^n)$.

(e) Montrer qu'une n-cellule e^n est fermée dans $X^n \backslash X^{n-1}$. En déduire que les n-cellules sont les composantes connexes de $X^n \backslash X^{n-1}$.

(f) Montrer que si un sous-ensemble A de X rencontre chaque cellule de X en au plus un point, il est fermé dans X, puis qu'il est discret (pour la topologie induite). En déduire qu'un sous-espace compact de X ne rencontre qu'un nombre fini de cellules. En particulier, l'adhérence d'une cellule est incluse dans un nombre fini de cellules (de dimensions inférieures ou égales).

(g) Etant donné A un sous-ensemble de X, construire par récurrence sur les squelettes un voisinage ouvert de A dans X : en supposant construit un voisinage de $\mathcal{V}_\varepsilon^n$ de $A \cap X^n$ dans X^n et étant donné une cellule e_α^{n+1}, étendre ce voisinage en prenant un ε_α-voisinage de $A \cap e_\alpha^{n+1}$ dans e_α^{n+1} et un voisinage "radial" de $\mathcal{V}_\varepsilon^n \cap (\overline{e_\alpha^{n+1}} \backslash e_\alpha^{n+1})$ dans e_α^{n+1}.

(h) Montrer que X est normal et donc séparé. (Un espace topologique X est normal si pour tous fermés F et G disjoints de X, il existe des ouverts disjoints $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ de X tels que $F \subset \mathcal{U}$ et $G \subset \mathcal{V}$.)

(i) Donner un exemple de complexe cellulaire Y, qui est un sous-ensemble d'un complexe cellulaire X, mais qui n'est pas un sous-complexe de X.

(j) Montrer qu'un sous-complexe Y d'un complexe cellulaire X est lui-même un complexe cellulaire et que sa topologie de complexe cellulaire est la même que celle de sous-espace de X. Montrer que Y est fermé dans X.

Homotopie.

---

(3) On équipe l'ensemble $C^0(X, Y)$ des applications continues de X dans Y de la topologie compacte-ouverte. On rappelle que c'est la topologie engendrée par les ensembles du type $\mathcal{W}(K, \mathcal{V}) = \{f \in C^0(X, Y) \mid f(K) \subset \mathcal{V}\}$, où K est un compact de X et $\mathcal{V}$ un ouvert de Y. (Si Y est un espace métrique, c'est la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.) Si F est une homotopie $X \times I \to Y$, on note $\hat{F} : I \to Y^X$ l'application définie par $\hat{F}(t) : x \mapsto F(x, t)$.

(a) Montrer que $\hat{F}$ est à valeurs dans $C^0(X, Y)$ et continue de I dans $C^0(X, Y)$, donc que c'est un *chemin* dans $C^0(X, Y)$.

(b) Donner une condition sur X pour que, réciproquement, tout chemin $I \to C^0(X, Y)$ définisse une homotopie $F : X \times I \to Y$. En déduire que sous cette condition, les classes d'homotopies d'applications $X \to Y$ sont exactement les composantes connexes par arcs de $C^0(X, Y)$.

(4) Montrer qu'une équivalence d'homotopie $X \to Y$ induit une bijection entre l'ensemble des composantes connexes (par arcs) de X et l'ensemble des composantes connexes (par arcs) de Y.

(5) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) X est contractile ;

(b) toutes les applications continues $X \to Y$, avec Y connexe par arcs, sont homotopes ;

(c) toutes les applications continues $Y \to X$ sont homotopes.

(6) Montrer que le cône CX sur un espace topologique X se rétracte par déformation forte sur son sommet et que donc CX est contractile.

(7) Montrer que la bande de Moebius se rétracte par déformation forte sur le cercle.

(8) (Rétractions, rétractions par déformation, rétractions par déformation forte)

(a) Donner un exemple d'un sous-ensemble A d'un espace topologique X qui n'est pas un rétracte de X.

(b) Donner un exemple d'une rétraction qui n'est pas une rétraction par déformation.

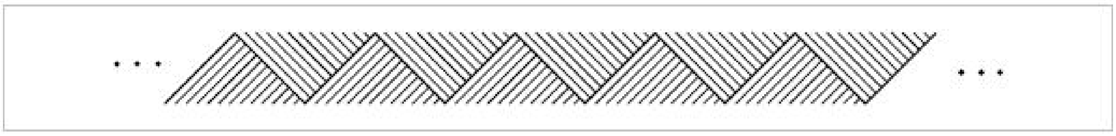
(c) Montrer que X est contractile si et seulement si il se rétracte par déformation sur chacun de ses points.

(d) Montrer que le peigne triangulaire

$$P = \{(x, y) \mid x \in [0, 1],\ y \in [0, 1],\ y \leq 1 - x,\ y = 0 \text{ ou } x \in \mathbb{Q}\}$$

est contractile, qu'il se rétracte par déformation forte sur certains de ses points mais pas sur d'autres. Distinguer ces différents types de points par une propriété topologique.

(e) Soit X l'espace topologique obtenu en recollant des peignes triangulaires suivant le dessin ci-dessous :



Montrer que X ne se rétracte par déformation forte sur aucun de ses points mais qu'il est néanmoins contractile.

(9) Montrer que $\mathbb{R}^3$ privé de deux droites non sécantes a le même type d'homotopie que $\mathbb{R}^2$ privé de deux points. Montrer que $\mathbb{R}^3$ privé de deux droites sécantes a le même type d'homotopie que $\mathbb{R}^2$ privé de trois points.

(10) Montrer que $\mathbb{R}^3$ privé d'un cercle se rétracte par déformation sur une sphère S^2 avec un diamètre attaché (prendre la sphère concentrique au cercle et de rayon plus grand et le diamètre de la sphère perpendiculaire au plan du cercle). En déduire que $\mathbb{R}^3 \backslash S^1$ a le même type d'homotopie que le bouquet (wedge) $S^1 \vee S^2$ (un cercle et une sphère attachés par un point).

(11) Montrer que $(B^n \times \{0\}) \cup (S^{n-1} \times I)$ est un rétracte par déformation forte de $B^n \times I$.

(12) Montrer qu'un complexe cellulaire X est localement contractile (tout ouvert de X contient un ouvert contractile). En déduire que X est localement connexe par arcs, et donc connexe par arcs s'il est connexe.