Master 2 MFA – Recherche Mathématique de l’Université de Lorraine (Metz-Nancy)

Responsables : Samuel Tapie (Nancy) et Tilmann Wurzbacher (Metz)

Ce Master 2 propose une initiation à la recherche mathématique contemporaine. Il peut être le point d’aboutissement d’études mathématiques. C’est aussi une année permettant de s’orienter vers une thèse de doctorat et les métiers de la recherche mathématique. Il est adossé aux équipes de recherche de l’Institut Elie Cartan de Lorraine. Les cours peuvent tous être suivis en présentiel depuis Nancy et Metz.

Les cours proposés s’articulent en deux parcours thématiques qui varient d’une année sur l’autre, et couvrent la plupart des thématiques de recherche de l’IECL sur 4 ans. Chaque parcours propose deux cours par semestre. Chaque étudiant doit valider trois cours au premier semestre (septembre à janvier) et deux cours au second semestre (fin janvier à avril), suivis d’un stage de recherche en laboratoire.

Programme 2026-2027 : parcours « Théorie Analytique des Nombres » et parcours « Probabilités – Statistiques »

Programme 2027-2028 : parcours « Géométrie Algébrique et Complexe » et parcours « Equations aux Dérivées Partielles »

2026-2027

Parcours "Théorie analytique des Nombres"

Présentation générale des cours S9 et S10 :

Les cours proposés au semestre 9 introduisent des outils de base en théorie additive, analytique et probabiliste des nombres. Le cours ***Introduction à la théorie analytique des nombres (I) : fonction zêta de Riemann et théorème des nombres premiers*** porte sur les fonctions arithmétiques, la fonction zêta de Riemann, les séries de Dirichlet. Il fournira une preuve du célèbre théorème des nombres premiers. Le cours ***Théorie des sommes d'exponentielles, analyse de Fourier discrète, et combinatoire additive (I)*** comporte un premier volet consacré à la théorie additive des nombres notamment à la structures de sommes de sous-ensembles de Z ou Z/nZ et un deuxième volet dévolu aux sommes d'exponentielles.

Les deux cours du semestre S10 sont dans la continuité des cours du S9. Dans le cours ***Introduction à la théorie analytique des nombres (II) : Fonctions L, sommes de caractères et nombres friables*** on étudiera en détail plusieurs exemples de fonctions L (dont ceux associées aux caractères de Dirichlet ou aux courbes elliptiques/formes modulaires), ainsi que les sommes de caractères et les entiers friables (entiers sans grand facteur premier). Le cours ***Méthodes de cribles, combinatoire additive (II) et théorie probabiliste des nombres*** continue l'étude de la structure des sommes d'ensemble commencée au S9. Il portera également sur les méthodes de cribles et on abordera quelques théorèmes de la théorie probabiliste des nombres.

On trouvera ci-dessous un programme indicatif et une bibliographie associée.

Semestre 9 :

1) Introduction à la théorie analytique des nombres (I) : fonction zêta de Riemann et théorème des nombres premiers

(C. Dartyge et Y. Lamzouri)

- Fonctions arithmétiques (fonction de Möbius, caractères de Dirichlet, fonction de diviseurs)
- Produits eulériens
- Convolutions, méthode de l'hyperbole
- Outils d'analyse réelle et complexe (Formule de Perron, formule d'Euler-Maclaurin)
- Formules de Mertens et estimations de Chebychev sur Pi (x)

- Séries de Dirichlet
- Fonction zêta de Riemann
- Équation fonctionnelle

- Preuve du théorème des nombres premiers
- Infinité des nombres premiers en progressions arithmétiques (L(1, chi) non zéro)

2) Théorie des sommes d'exponentielles, analyse de Fourier discrète, et combinatoire additive (I)

(A. de Roton et T. Stoll)

a) Analyse de Fourier discrète

- Théorème de Roth dans les entiers
  - outils d'analyse de Fourier discrète, lien avec les structures additives
  - passage dans Z/nZ
  - biais additif –> concentration sur une progression arithmétique
  - itération et conclusion

- Ensembles de petite somme :
  - premières minorations dans Z et Z/nZ
  - Le théorème 3k-4 de Freiman dans Z
  - Vers un théorème 3k-4 dans Z/nZ

- Théorème de Freiman-Rusza :
  - analyse de Fourier discrète, ensembles de Bohr, sommes itérées,
  - preuve dans Z/nZ : lemme de recouvrement, Plünnecke-Ruzsa
  - retour dans Z : isomorphisme de Freiman

b) Théorie des sommes d'exponentielles
- Méthodes de Weyl, de van der Corput, de Vinogradov
- Méthode de Mordell, inégalité de Weil et sommes de Gauss

- Fonctions exponentielles et répartition des fonctions mod p
- Suites équiréparties modulo 1, critère de Weyl
- Discrépance et inégalité d'Erdős-Turán
- approximation diophantienne (aperçu), fractions continues
- Vinogradov trois premiers

Semestre 10 :

<u>1) Introduction à la théorie analytique des nombres (II) : fonctions L, sommes de caractères et nombres friables</u>

(Y. Lamzouri et T. Stoll)

- Fonctions L de Dirichlet deuxième partie (zéros de Siegel, Siegel-Walfisz)
- Fonctions L de degré supérieur, exemples de GL2 (fonctions L de courbes elliptiques et formes modulaires)
- Moments de polynômes de Dirichlet (théorème de Montgomery-Vaughan)
- Moments de fonctions L
- Répartitions des zéros non-triviaux (zéros sur la droite critique (Hardy, Selberg, Levinson), théorèmes de densités de zéros)
- Oscillations des termes d'erreurs (Théorème de Landau)
- Sommes de caractères (Pólya-Vinogradov, Burgess)
- Nombres friables, diverses estimations et applications

<u>2) Méthodes de cribles, combinatoire additive (II) et théorie probabiliste des nombres</u>

(C. Dartyge et A. de Roton)

- Théorème de Roth dans les ensembles de densité nulle, principe de transfert :
    Stratégie générale : théorème de Varnavides, principe de transfert
    Dans les nombres premiers : mesure aléatoire pour les premiers, majoration en norme quadratique.

- Cribles : lemme fondamental, crible de Selberg, grand crible

- Théorème de Bombieri-Vinogradov sur la répartition en moyenne des nombres premiers dans les progressions arithmétiques
- Applications au problème des nombres premiers jumeaux, au théorème de Brun-Titchmarch
- Théorie probabiliste des nombres : densités en théorie des nombres, théorème d'Erdős-Kac sur la distribution de la fonction nombre de facteurs premiers

<u>Références pour les cours S9 et S10 :</u>

- H. Davenport, Multiplicative Number Theory. 3rd ed., revised and with a preface by Hugh L. Montgomery. Graduate Texts in Mathematics, vol. 74. Springer-Verlag, New York, 2000.

- S.W. Graham et G. Kolesnik, Van der Corput's Method of Exponential Sums. London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 126. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

- H. Iwaniec et E. Kowalski, Analytic Number Theory. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 2004.

- D. Koukoulopoulos, The Distribution of Prime Numbers. Graduate Studies in Mathematics, vol. 203. American Mathematical Society, Providence, RI, 2019

- H. L. Montgomery et R. C. Vaughan, Multiplicative Number Theory I: Classical Theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 97. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

- J. Rivat, Prime Numbers, in Ergodic Theory and Dynamical Systems in their Interactions with Arithmetics and Combinatorics: CIRM Jean-Morlet Chair, Fall 2016, edited by S. Ferenczi, J. Kułaga-Przymus & M. Lemańczyk, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2213. Springer, Cham, 2018.

- T. Tao et V. Vu, V. Additive Combinatorics. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 105. Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

- G. Tenenbaum, Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres. Dunod, Paris, 2022.

==

<u>Parcours « Probabilités » :</u>

1er semestre :

- **Processus stochastiques discrets (36h CM, 18h TD), Valentin Feray & Edouard Strickler :**

  Le but de ce cours est d'acquérir un arsenal d'outils utilisés dans l'étude de nombreux modèles probabilistes discrets, théoriques ou appliqués.

  Grandes lignes du programme :

  - chaînes de Markov : méthodes de Monte-Carlo, simulation par couplage par le passé, application au modèle d'Ising.
  - chaînes de Markov en temps continu (CTMC), théorie ergodique.
  - méthode des moments, lois caractérisées par leurs moments.
  - marches aléatoires, et compléments au théorème central limite : théorème local limite, grandes déviations, lemme cyclique, convergence fonctionnelle (théorème de Donsker)

- **Processus stochastiques à temps continu (36h CM, 18h TD), Yvain Bruned & Kolehe Coulibaly-Pasquier :**

  Ce cours est une introduction à la théorie des processus stochastiques en temps continu. Nous y décrirons ses objets classiques et leurs applications.

  - processus gaussiens
  - construction et propriétés du mouvement brownien
  - martingales et semi-martingales

- intégrale d'Itô, équations différentielles stochastiques, théorème de Girsanov
- théorème de Lévis (caractérisation des martingales comme changement de temps d'un MB)

Références : Revuz et Yor, Rogers et Williams

2nd semestre :

- **Graphes aléatoires (30h CM), Pascal Moyal :**

  Ce cours est une introduction à la théorie des graphes aléatoire, en se focalisant sur trois modèles emblématiques.

  - Définitions générales; Connexité; Arbres; Familles indépendantes; Nombre chromatique; Couplages dans les graphes.
  - Le graphe aléatoire d'Erdös-Rényi : Méthodes des moments. Définition et premières propriétés; Transition de phase pour la connexité; Transition de phase pour le diamètre; Emergence de la composante géante.
  - L'arbre de Galton-Watson : Arbres enracinés infinis; Définition de l'arbre de Galton-Watson; Transition de phase pour la probabilité d'extinction; Exploration en profondeur - Inégalité de concentration pour la taille dans le cas sous-critique; Etude de l'arbre conditionné à survivre; Quelques applications.
  - Le modèle de configuration : Définition et propriétés; Graphicalité asymptotique; Lien avec les graphes uniformes Construction par appariement uniforme; Représentation markovienne.
  - Autres modèles - Processus markoviens sur des graphes : Le modèle d'attachement préférentiel; Le stochastic block model (SBM); L'algorithme glouton de famille indépendante maximale sur le graphe d'Erdös-Rényi et sur le modèle de configuration. Application aux réseaux radio-mobile. Processus de contagion sur des graphes aléatoires. Couplage en ligne sur le SBM.

- **Contrôle stochastique optimal (30h CM), Nabil Kazi-Tani :**

  Ce cours est une introduction à la résolution des problèmes contrôle stochastique par le principe de la programmation dynamique. Nous explorerons les liens entre ces problèmes de contrôle et une classe d'équations aux dérivées partielles, dite de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Dans le cas des problèmes de contrôle dits non markoviens, nous étudierons un outil probabiliste de résolution, à savoir les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR).

  Mots clés : Fonction valeur, Formule de Feynman-Kac, EDP de HJB, Représentation des martingales, EDS rétrogrades.

  Références :
  - Fleming, W. H., & Soner, H. M. (2006). Controlled Markov processes and viscosity solutions (Vol. 25). Springer Science & Business Media.
  - Touzi, N., & Tourin, A. (2013). Optimal stochastic control, stochastic target problems, and backward SDE (Vol. 29). New York: Springer.