Processus d'exploration, de marquage et de contagion sur les grands graphes aléatoires: construction couplée, analyse exacte et approximation.

Thèse proposée à l'**Institut Elie Cartan de Lorraine**, sur le site de Nancy.

Co-directeurs de Thèse

- Régine Marchand est Professeure des Universités à l'Institut Elie Cartan de Lorraine. Elle est spécialiste en ...
- Pascal Moyal est Professeur des Universités à l'Institut Elie Cartan de Lorraine. Il est spécialisé dans la modélisation stochastique des systèmes à événements discrets, les théorèmes limite pour les processus stochastiques et les graphes aléatoires.

Profil

Nous recherchons un(e) candidat(e) ayant un bagage solide en probabilités: modélisation probabiliste, étude des processus aléatoires, analyse stochastique, combinatoire. Une appétence pour les approches algorithmiques, et pour la simulation de processus aléatoires sur machine, sera un plus. Au delà de son expertise technique, nous recherchons avant tout un(e) candidat(e) ayant un goût prononcé pour la recherche, l'esprit d'initiative et de persévérance, et une curiosité mathématique dépassant le cadre de son sujet de thèse.

Contexte

Les graphes aléatoires jouent un rôle de plus en plus prépondérant dans de nombreux applications des probabilités: ils peuvent représenter des réseaux sociaux, des modèles épidémiologiques sur de grandes populations, des réseaux de télécommunication, des réseaux d'interaction de gènes, des réseaux d'énergie, etc. Dans ces contextes, on sera amené à étudier de très grands graphes (parfois plusieurs millions de sommets), et de donner les caractéristiques générales de ces objets en *limite grand graphe*, en les modélisant par un grand graphe aléatoire ayant des caractéristiques générales données, plutôt que d'en donner les caractéristiques géométriques locales précises, qui sont en général inconnues.

Objectif général

L'objectif principal de ce travail de thèse est de donner un cadre théorique probabiliste précis à l'étude de l'approximation en grand graphe, de différents processus d'**exploration** de ces grands graphes aléatoires. Pour modéliser l'incertitude liée à la géométrie précise du graphe, nous travaillerons en priorité sur des graphes aléatoires générés par le *modèle de configuration*, tel qu'introduit dans [7], voir aussi [17, 22] pour une présentation complète. On suppose que les degrés des noeuds sont connus (et réalisent par exemple un n-échantillon d'une loi de probabilité donnée sur $\mathbb{N}$), et on tire au sort une réalisation d'un multi-graphe ayant cette distribution de degrés, par appariement séquentiel et uniforme des *demi-arêtes* des noeuds. On s'intéressera alors naturellement à des processus d'*exploration* de ces graphes: l'exploration en longueur, et l'exploration en profondeur (comme dans [18]), permettent de tester la connexité du graphe, et éventuellement de construire des arbres couvrants pour celui-ci. On peut par ailleurs, explorer ce graphe en suivant la propagation d'une épidémie ou un processus de contact, comme dans [3, 5, 11, 13, 14], construire une

famille indépendante maximale par l'algorithme dit de la *greedy independent set*, voir [6, 9, 10] ou encore, en construisant à la volée un couplage des noeuds, comme dans [8, 20, 15, 16].
La construction séquentielle du graphe par le modèle de configuration, décrite plus haut, induit alors des représentations markoviennes naturelles dans des espaces de mesures ponctuelles. On peut alors coupler, de manière fructueuse, cette construction avec l'un des processus d'exploration mentionnés ci-dessus, en obtenant des représentations markoviennes simples, qui permettent alors de décrire facilement les caractéristiques de ces processus d'exploration, en régime asymptotique grand graphe. Cette approche couplée est souvent appelée *constructing while exploring.*
L'objectif général de ce travail de thèse sera de contribuer à généraliser cette approche de *constructing while exploring* à une plus grande classe de graphes et de processus d'exploration et/ou de contagion, afin de donner des approximation en grand graphe des caractéristiques de ces processus.

Plan de réalisation

Nous identifions trois axes principaux.

1. Notre objectif sera d'abord, d'axiomatiser cette approche générale, et de l'étendre à une grande classe de processus d'explorations de graphes. La limite en grand graphe de ces processus est en général identifiée comme solution d'une équation différentielle, et il apparaît que cette approche puisse généraliser, à des espaces de mesures, la *differential equation method* de Wormald [24], en donnant une approximation générale de ces caractéristiques pour un grand graphe généré aléatoirement parmi ceux de même distribution de degrés.

2. En second lieu, nous envisageons de spécialiser cette approche à plusieurs processus d'exploration de graphes cruciaux pour les applications, et non encore envisagés dans le littérature:

    - L'**exploration en largeur** du graphe, en tâchant d'adapter les arguments de [18] pour l'exploration en profondeur. Cette approche peut, par exemple, permettre d'approcher le diamètre du graphe, ou de la composante connexe considérée.

    - Le **coloriage** du graphe, en cherchant par exemple, quelle proportion asymptotique de noeuds peuvent être coloriés avec un ensemble fixé de k couleurs, ou en adressant le problème dual: combien de couleurs différentes sont nécessaire en explorant et en coloriant le graphe de façon gloutonne, dans la construction couplée.

3. La propagation d'épidémies sur un réseau peut aussi entrer dans ce cadre: une analyse *constructing while exploring* permet par exemple d'étudier la compétition entre deux épidémies dirigées par des percolations de premier passage avec temps exponentiels ([2], [1]). Cette approche pourrait aussi permettre d'étudier des épidémies avec rémission (processus de contact ou SIS), en particulier dans le cadre d'un graphe de configuration dont les connections évoluent au cours du temps (dynamic random graph).

Techniques probabilistes mises en jeu

Bien sûr, ces trois axes sont liés, et les objectifs pourront être ajustés au fil du travail. Ils mettront en jeu, tout d'abord, la **modélisation probabiliste** des réseaux considérés par un modèle de graphe aléatoire et un processus d'exploration donné. Nous envisagerons éventuellement, dans plusieurs cas complexes, de commencer par **simuler** efficacement ces processus pour en capturer les tendances générales en grand graphe, en appréhendant ces processus d'exploration de manière algorithmique. Ensuite, les outils de l'**analyse stochastique**, éventuellement par des techniques d'approximation de processus aléatoires, nous permettront d'analyser exactement ou de manière approchée, ces processus d'exploration. Des outils **combinatoires** pour la structure de ces graphes et de **limites locales** pour l'approximation locale en grand graphe par des processus branchants de type Galton Watson, seront également envisagés.

Cadre et organisation du travail

Le (la) doctorant(e) bénéficiera du cadre de travail privilégié qu'offre l'Institut Elie Cartan de Lorraine : un bureau à temps plein partagé avec d'autres doctorants/ATER/Postdocs, une bibliothèque de recherche très fournie, l'accès à une très riche littérature électronique à travers un grand éventail de base de données; un ordinateur portable et une station d'accueil dans son bureau. Le(la) doctorant(e) sera pleinement intégré(e) à l'équipe *Probabilités et Statistique* de l'IECL, et pourra bénéficier, à travers sa participation à des séminaires et groupes de travail hebdomadaires, d'un accès aux développements récents de la recherche, dans un vaste spectre de thèmes.
Le(la) doctorant(e) sera suivi(e) au cours de réunions hebdomadaires à l'IECL, où travaillent les deux encadrants.
Les travaux de thèse du (de la) doctorant(e) seront valorisés par une participation régulière à des conférences et colloques. Dès que les résultats scientifiques seront assez conséquents, nous chercherons à publier ses recherches dans des revues de haut niveau en probabilités et en probabilités appliquées, voire en combinatoire.

Collaborations

Au cous de ses travaux, le(la) doctorant(e) bénéficiera des nombreux collaborations tissées sur ces thématiques de recherche par ses directeurs de thèse, parmi lesquels, Le LAAS Toulouse ou l' Univ. of North Carolina at Chapel hill.

Dossier de Candidature

Le/la candidat(e) devra fournir:

- Un CV détaillé incluant ses notes aux différents diplômes obtenus;
- Une lettre de motivation;
- Les noms de deux Professeur(e)s qui seraient d'accord pour le recommander.

À Nancy, le 12/05/2026.

References

[1] Daniel Ahlberg, Maria Deijfen, Svante Janson. Competing first passage percolation on random graphs with finite variance degrees. *Random Structures and Algorithms* **55**, No. 3, 545-559, 2019.

[2] Tonći Antunović, Yael Dekel, Elchanan Mossel, Yuval Peres. Competing first passage percolation on random regular graphs. *Random Structures and Algorithms* **50**, No. 4, 534-583, 2017.

[3] O.S. Awolude, H. Don, E. Cator. The SIS process on Erdös-Rényi graphs: determining the infected fraction. *Phys. Rev. E* **111**, 2025.

[4] Shankar Bhamidi, Remco van der Hofstad, Gerard Hooghiemstra. First passage percolation on random graphs with finite mean degrees. *Annals of Applied Probability* **20**, No. 5, 1907-1965, 2010.

[5] Shankar Bhamidi, Danny Nam, Oanh Nguyen, Allan Sly. Survival and extinction of epidemics on random graphs with general degree. *Annals of Probability* **49(1)**: 244-286, 2021.

[6] Paola Bermolen, Matthieu Jonckheere, and Pascal Moyal. The jamming constant of uniform random graphs. *Stochastic Processes and their Applications* **127**(7):2138–2178, 2017.

[7] Béla Bollobás. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labelled regular graphs. *European Journal of Combinatorics* **1**(4):311–316, 1980.

[8] Charles Bordenave, Marc Lelarge, and Justin Salez. Matchings on infinite graphs. *Probability Theory and Related Fields* **157**(1-2): 183–208, 2013.

[9] Graham Brightwell, Svante Janson, and Malwina Luczak. The greedy independent set in a random graph with given degrees. *Random Structures & Algorithms* **51**(4): 565–586, 2017.

[10] Alice Contat, and Nicolas Curien. Parking on Cayley trees and frozen Erdos–Rényi. *The Annals of Probability* **51**(6): 1993-2055, 2023.

[11] Laurent Decreusefond, Jean-Stéphane Dhersin, Pascal Moyal, and Viet Chi Tran. Large graph limit for an sir process in random network with heterogeneous connectivity. *The Annals of Applied Probabability* **22**(2): 541–575, 2012.

[12] Olivier Garet and Régine Marchand. Coexistence in two-type first-passage percolation models. *The Annals of Applied Probability* **15**(1A): 298:330, 2005.

[13] Olivier Garet and Régine Marchand. Asymptotic shape for the contact process in random environment. *The Annals of Applied Probability* **22**(4): 1362:1410, 2012.

[14] Olivier Garet and Régine Marchand. Large deviations for the contact process in random environment. *The Annals of Probability* **42**(4): 1438:1479, 2014.

[15] Mohamed Habib Aliou Diallo Aoudi, Pascal Moyal, and Vincent Robin. Markovian online matching algorithms on large bipartite random graphs. *Methodology and Computing in Applied Probability* **24**(4): 3195–3225, 2022.

[16] Mohamed Habib Aliou Diallo Aoudi, Pascal Moyal, and Vincent Robin. Large graph limits of local matching algorithms on Configuration model graphs. *ArXiv preprint arXiv:2410.18059v2*, 2024.

[17] Rick Durrett. Random graph dynamics. *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics*, Cambridge University Press, 2006.

[18] Nathanael Enriquez, Gabriel Faraud, Laurent Ménard, and Nathan Noiry. Depth first exploration of a configuration model. *Electronic Journal of Probability* **27**: 1–27.

[19] Xiangying Huang, Rick Durrett. The contact process on random graphs and Galton Watson trees. *ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **17**, No. 1, 159-182, 2020.

[20] Nathan Noiry, Vianney Perchet, and Flore Sentenac. Online matching in sparse random graphs: Non-asymptotic performances of greedy algorithm. *Advances in Neural Information Processing Systems* **34**:21400–21412, 2021.

[21] Flore Sentenac, Nathan Noiry, Matthieu Lerasle, Laurent Ménard, and Vianney Perchet. Online matching in geometric random graphs. *ArXiv preprint arXiv:2306.07891*, 2023.

[22] Remco van der Hofstad. *Random Graphs and Complex Networks: Volume 1.* Cambridge University Press, USA, 1st edition, 2016.

[23] Daniel Valesin. The contact process on random graphs. *Sociedade Brasileira de Matemática. Ensaios Mat.* **40**, 1-115, 2024.

[24] Nicholas C. Wormald. Differential equations for random processes and random graphs. *The Annals of Applied Probability* **5**(4): 1217–1235, 1995.